NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsga (alap- és középszint)** *2009. január 14.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 15 pontot, annak a vizsgája sajnos elégtelen (ekkor a második részt ki sem javítjuk.) Aki középszinten vizsgázik, annak a dolgozat második részéből is legalább 50%-ot kell szereznie ahhoz, hogy a vizsgája sikeres legyen.*

1. Ha z képzetes része 3, akkor mennyi $i \cdot \overline{z}$ valós része?

3

2. Mennyi $-2i(\cos 13° - i \sin 13°)$ szöge?

$-103° = 257°$

3. Ha $(3+4i)z$ hossza $5/3$, akkor mennyi $1/z^4$ hossza?

81

4. Melyik komplex szám lesz az $i\sqrt{2}$-nek az origó körüli 45 fokos elforgatottja?

$i\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = -1 + i$

5. Mennyi $3\,(\cos 10° + i \sin 10°)$ rendje?

végtelen (nincs véges rendje)

6. Írjunk föl egy olyan háromismeretlenes, három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, amelynek egynél több megoldása van, de nem megoldása az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

   Például
   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 29 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 29 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 29 \end{aligned}$$

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{6\times 4}$. Hányszor hányas B mátrixokra értelmes az $AB - B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ kifejezés?

4×6

8. Adjunk meg olyan a és b számokat, amelyekre az $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix szorzata $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 14 \end{pmatrix}$.

$a = 6$, $b = -2$

9. Mi lehet a β szám értéke, ha a $\begin{pmatrix} \beta & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak nincs inverze?

β lehet: 6

10. Ha $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ és A^3 rangja 4, akkor mennyi az A determinánsa?

$\det A = 0$

11. Soroljuk fel az $\begin{pmatrix} a & b & c & d & f \\ b & c & d & a & f \end{pmatrix}$ permutáció inverzióit.

$b\ a;\ \ c\ a;\ \ d\ a$

12. Írjuk föl a 6×6-os (m_{ij}) mátrix determinánsát definiáló összeg azon — előjeles — tagját, amely a legnagyobb inverziószámú permutációhoz tartozik.

$(-1)^{15} m_{6,1} m_{5,2} m_{4,3} m_{3,4} m_{2,5} m_{1,6}$

13. Ha $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ és $\det M + \det M^{-1} = 1$, akkor $\det(M)$ valós része:

1/2

14. Egy ötször ötös (komplex elemű) A mátrix determinánsa 2. Mennyi lesz $\det A'$, ha az A' mátrixot úgy kapjuk, hogy A minden elemét elosztjuk i-vel?

$2/i^5 = -2i$

15. Írjuk föl a $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ determináns első oszlopa szerinti **ferde** kifejtését (az összeg tagjait).

$3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3$

16. Egy 8×3-as nemnulla mátrix első és második oszlopának az összege egyenlő a harmadik oszloppal. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

1 és 2

17. Adjunk példát két olyan másodfokú polinomra, amelyek összege nulladfokú.

például $x^2 + 2009$ és $-x^2 + \pi$

18. Legyen $g = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$, és z nemvalós komplex szám. Ha g-nek z és $\overline{z}$ is kétszeres gyöke, akkor:

$\operatorname{Im} c = 0$

19. A negyedfokú f és g valós együtthatós polinomok mindegyikének $99 + 100i$ kétszeres gyöke. Ekkor az f és g legnagyobb közös osztójának foka:

4

20. Mennyi az $5x^7 + 3x^5 + 2$ polinom gyökeinek a szorzata?

$-2/5$

21. Mi a maradék, ha $x^{2009} + 999$-et maradékosan elosztjuk $x - i$-vel?

$999 + i$

22. Hány különböző racionális gyöke van $x^6 - x^5 + 2x^3 - x^2 - 1$-nek?

1 (az 1)

23. Ha az $x^n - 4$ polinom $\mathbb{R}[x]$-ben két irreducibilis polinomnak a szorzata, akkor n lehetséges értékei:

2 és 3

24. Írjunk föl egy olyan hatodfokú polinomot $\mathbb{Q}$ fölött, amely $\mathbb{Q}$ fölött egy első- és egy ötödfokú irreducibilis polinomnak a szorzata.

például $(x+1)(x^5+7) = x^6 + x^5 + 7x + 7$

25. Adjunk meg olyan m **egészet** és c **racionális** számot, amelyekre $c(5x^7 + mx - 25)$ teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

$m = 100$ (ált. $25k$) , $c = 1/5$

26. Bontsuk irreducibilisek szorzatára a $100x^3 + 100x + 100$ polinomot $\mathbb{Z}$ fölött. Hány irreducibilis tényező keletkezik?

$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (x^3 + x + 1)$, azaz 5 tényező.

27. Számítsuk ki $1/(6+8)$ értékét a $\mathbb{Z}_{11}$ testben.

4

28. Adjunk példát egy nullosztó párra a $\mathbb{Z}_{27}$ gyűrűben.

például 3 és 18

29. Hány különböző gyöke van az $x^7 + 3$ polinomnak a $\mathbb{Z}_7$ testben?

1 ($0 = a^7 + 3 = a + 3$, így $a = 4$, sőt $x^7 + 3 = x^7 - 4^7 = (x-4)^7$)

30. Hány valós gyöke van az $x^3 - 6x + 4$ polinomnak? Segítségül Cardano képlete az $x^3 + px + q$ polinomra: $\sqrt[3]{(-q/2) + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt[3]{(-q/2) - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$.

3, mert $D = (q/2)^2 + (p/3)^3 = -4 < 0$. („Casus Irreducibilis”)

II. rész (30 perc). *A tétel teljesen precíz kimondása* 1 *pontot, az egész feladat* 10 *pontot ér. Középszinten a legalább elégséges osztályzathoz ebből a részből legalább* 5 *pontot kell szerezni.*

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, középszintűeknél pedig a második részben is legalább* 5 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első és a második részre kapott összpontszám S, akkor:*

	Osztályzat
$S \leq 19$	2
$20 \leq S \leq 25$	3
$26 \leq S \leq 31$	4
$32 \leq S \leq 40$	5

---

31. A mátrix transzponáltjának determinánsáról szóló tétel.