NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsga (alap- és középszint)** *2009. január 14.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 15 *pontot, annak a vizsgája sajnos elégtelen (ekkor a második részt ki sem javítjuk.) Aki középszinten vizsgázik, annak a dolgozat második részéből is legalább 50%-ot kell szereznie ahhoz, hogy a vizsgája sikeres legyen.*

1. Ha z képzetes része 3, akkor mennyi $i \cdot \overline{z}$ valós része?

2. Mennyi $-2i(\cos 13° - i \sin 13°)$ szöge?

3. Ha $(3+4i)z$ hossza $5/3$, akkor mennyi $1/z^4$ hossza?

4. Melyik komplex szám lesz az $i\sqrt{2}$-nek az origó körüli 45 fokos elforgatottja?

5. Mennyi $3\,(\cos 10° + i \sin 10°)$ rendje?

6. Írjunk föl egy olyan háromismeretlenes, három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, amelynek egynél több megoldása van, de nem megoldása az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{6\times 4}$. Hányszor hányas B mátrixokra értelmes az $AB - B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ kifejezés?

8. Adjunk meg olyan a és b számokat, amelyekre az $(a \quad b)$ és az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix szorzata $(6 \quad 6 \quad 14)$.

   $a = 6$, $b =$

9. Mi lehet a β szám értéke, ha a $\begin{pmatrix} \beta & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak nincs inverze?

   β lehet:

10. Ha $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ és A^3 rangja 4, akkor mennyi az A determinánsa?

    $\det A =$

11. Soroljuk fel az $\begin{pmatrix} a & b & c & d & f \\ b & c & d & a & f \end{pmatrix}$ permutáció inverzióit.

12. Írjuk föl a 6×6-os (m_{ij}) mátrix determinánsát definiáló összeg azon — előjeles — tagját, amely a legnagyobb inverziószámú permutációhoz tartozik.

13. Ha $M \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ és $\det M + \det M^{-1} = 1$, akkor $\det(M)$ valós része:

14. Egy ötször ötös (komplex elemű) A mátrix determinánsa 2. Mennyi lesz $\det A'$, ha az A' mátrixot úgy kapjuk, hogy A minden elemét elosztjuk i-vel?

15. Írjuk föl a $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ determináns első oszlopa szerinti **ferde** kifejtését (az összeg tagjait).

16. Egy 8×3-as nemnulla mátrix első és második oszlopának az összege egyenlő a harmadik oszloppal. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

17. Adjunk példát két olyan másodfokú polinomra, amelyek összege nulladfokú.

18. Legyen $g = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$, és z nemvalós komplex szám. Ha g-nek z és $\overline{z}$ is kétszeres gyöke, akkor:

$\operatorname{Im} c =$

19. A negyedfokú f és g valós együtthatós polinomok mindegyikének $99 + 100i$ kétszeres gyöke. Ekkor az f és g legnagyobb közös osztójának foka:

20. Mennyi az $5x^7 + 3x^5 + 2$ polinom gyökeinek a szorzata?

21. Mi a maradék, ha $x^{2009} + 999$-et maradékosan elosztjuk $x - i$-vel?

22. Hány különböző racionális gyöke van $x^6 - x^5 + 2x^3 - x^2 - 1$-nek?

23. Ha az $x^n - 4$ polinom $\mathbb{R}[x]$-ben két irreducibilis polinomnak a szorzata, akkor n lehetséges értékei:

24. Írjunk föl egy olyan hatodfokú polinomot $\mathbb{Q}$ fölött, amely $\mathbb{Q}$ fölött egy első- és egy ötödfokú irreducibilis polinomnak a szorzata.

25. Adjunk meg olyan m **egészet** és c **racionális** számot, amelyekre $c(5x^7 + mx - 25)$ teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

$m = 100$ (ált. $25k$) , $c =$

26. Bontsuk irreducibilisek szorzatára a $100x^3 + 100x + 100$ polinomot $\mathbb{Z}$ fölött. Hány irreducibilis tényező keletkezik?

27. Számítsuk ki $1/(6+8)$ értékét a $\mathbb{Z}_{11}$ testben.

28. Adjunk példát egy nullosztó párra a $\mathbb{Z}_{27}$ gyűrűben.

29. Hány különböző gyöke van az $x^7 + 3$ polinomnak a $\mathbb{Z}_7$ testben?

30. Hány valós gyöke van az $x^3 - 6x + 4$ polinomnak? Segítségül Cardano képlete az $x^3 + px + q$ polinomra: $\sqrt[3]{(-q/2) + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt[3]{(-q/2) - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$.

II. rész (30 perc). *A tétel teljesen precíz kimondása* 1 *pontot, az egész feladat* 10 *pontot ér. Középszinten a legalább elégséges osztályzathoz ebből a részből legalább* 5 *pontot kell szerezni.*

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, középszintűeknél pedig a második részben is legalább* 5 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első és a második részre kapott összpontszám* S*, akkor:*

	Osztályzat
$S \le 19$	2
$20 \le S \le 25$	3
$26 \le S \le 31$	4
$32 \le S \le 40$	5

---

31. A mátrix transzponáltjának determinánsáról szóló tétel.