NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. (BSc.) **Algebra1 alap- és középszint: 1. vizsga/1** *2009. január 7.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 15 *pontot, annak a vizsgája sajnos elégtelen (ekkor a második részt ki sem javítjuk.) Aki középszinten vizsgázik, annak a dolgozat második részéből is legalább 50%-ot kell szereznie ahhoz, hogy a vizsgája sikeres legyen.*

1. Mennyi $i(2-3i)$ konjugáltjának képzetes része?

-2

2. Mennyi $\cos(-30°) - i\sin(-30°)$ (0 és 360 fok közötti) szöge?

$30°$

3. Ha z szöge $50°$, mennyi $-2008/z$ szöge?

$130°$

4. Melyik komplex szám lesz a $-1+2i$-nek az origó körüli -90 fokos elforgatottja?

$-i(-1+2i)$ (azaz $2+i$).

5. Mennyi $\left(\cos(10°) + i\sin(10°)\right)^{-2}$ rendje?

18

6. Írjunk föl egy olyan, három egyenletből álló, kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert, melynek pontosan egy megoldása van.

Például
$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ x+y &= 3 \end{aligned}$$

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Hányszor hányas C mátrixokra értelmes az ACB kifejezés?

3×4

8. Ha $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, akkor mi az N második sorának harmadik eleme?

2

9. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inverzét.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

10. Mely a, b, c, d számok esetén invertálható az $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ szorzatmátrix?

Nincs ilyen (mert a szorzat rangja legfeljebb 1, vagy mert a determinánsa nulla lesz).

11. Mennyi az $\begin{pmatrix} x\,v\,u\,y \\ u\,x\,y\,v \end{pmatrix}$ permutációban az inverziók száma?

3 (ezek ux, uv, yv).

12. Írjuk fel a determinánst definiáló ($n!$ tagú) szummát.

$$\sum_f sg(f) a_{f(1)1} \dots a_{f(n)n} \qquad \text{vagy} \qquad \sum_f sg(f) a_{1f(1)} \dots a_{nf(n)}$$

13. Ha az $M \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ mátrix determinánsa d, akkor mennyi lesz $\det(M + M)$?

$32d$

14. Hogyan változik egy háromszor hármas mátrix determinánsa, ha a középpontjára tükrözzük?

Nem változik (mert ez egy oszlop- és egy sorcsere egymásutánja).

15. Írjuk föl az $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ determináns egy tetszőleges ferde kifejtését (az összeg tagjait).

Például $3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3)$ (a második sor elemeivel szoroztuk az első sor elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokat).

16. Egy 5×3-as mátrixnak van két lineárisan független sora. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

2 és 3.

17. Adjunk példát két olyan másodfokú polinomra, melyek összegének nincs foka.

Például x^2 és $-x^2$ (mert az összeg a nullapolinom).

18. Adjunk példát olyan polinomra, amelynek az 1 kétszeres gyöke, és van nem valós gyöke is.

Például $(x-1)^2(x-i)$.

19. Adjunk példát olyan negyedfokú, valós együtthatós polinomra, melynek $1+i$ kétszeres gyöke.

Például $(x-1-i)^2(x-1+i)^2 = (x^2-2x+2)^2$.

20. Mennyi az $5x^6 + 3x^5 + 2$ polinom gyökeinek az összege?

$-3/5$

21. Mi a maradék, ha $x^{2008} + 2008$-at maradékosan elosztjuk $2008x - 2008$-cal?

2009

22. Soroljuk fel $x^7 + x^5 + x^2 + 1$ racionális gyökeit.

-1

23. Hány irreducibilis polinom szorzata valós fölött $x^{22} + 1$?

11

24. Írjunk föl egy olyan hatodfokú, nem irreducibilis polinomot $\mathbb{Q}$ fölött, melynek nincs racionális gyöke.

Például $(x^2 + 1)^3$ (mindenütt pozitív).

25. Adjunk meg olyan m egészet, melyre $7x^6+mx^3+42x^2+420$ teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

3

26. Bontsuk irreducibilisek szorzatára a $10x^2 - 40$ polinomot $\mathbb{Z}$ fölött. Hány irreducibilis tényező keletkezik?

$2 \cdot 5(x - 2)(x + 2)$, azaz 4 tényező.

27. Számítsuk ki $1/(3 + 4)$ értékét a $\mathbb{Z}_5$ testben.

3

28. Adjunk példát nullosztóra a $\mathbb{Z}_{15}$ gyűrűben.

Például 3, mert itt 3 és 5 szorzata nulla.

29. Bontsuk az $x^3 + 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára a $\mathbb{Z}_3$ test fölött.

$(x + 1)^3$ (tagonként lehet köbre emelni).

30. Hány valós gyöke van az $x^3 - 3x + 4$ polinomnak? Segítségül Cardano képlete az $x^3 + px + q$ polinomra: $\sqrt[3]{(-q/2) + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt[3]{(-q/2) - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$.

1, mert $D = (q/2)^2 + (p/3)^3 = 3 > 0$.

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. (BSc.) **Algebra1 alap- és középszint: 1. vizsga/4** *2009. január 7.*

II. rész (30 perc). *A tétel teljesen precíz kimondása* 3 *pontot, az egész feladat* 10 *pontot ér. Középszinten a legalább elégséges osztályzathoz ebből a részből legalább* 5 *pontot kell szerezni.*

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, középszintűeknél pedig a második részben is legalább* 5 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első és a második részre kapott összpontszám* S*, akkor:*

	Osztályzat
$S \leq 19$	2
$20 \leq S \leq 25$	3
$26 \leq S \leq 31$	4
$32 \leq S \leq 40$	5

---

31. A (polinomokra vonatkozó) maradékos osztás tétele: létezés és egyértelműség.