Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Kilencedik feladatsor (2008 dec. 2–12)

Elméleti tudnivalók: Primitív komplex egységgyökök (1.5), körosztási polinom (3.9), gyűrűk és testek (2.2). A második zárthelyiben csak a vonal feletti rész szerepel.

1.5.15. *Az* 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi)+i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°)+i\sin(336°)$ *számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely* n*-ekre lesznek ezek a számok* n*-edik egységgyökök? És primitív* n*-edik egységgyökök?*

1.5.20. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

1.5.22. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

1.5.17. *Mutassuk meg, hogy ha* $n>0$ *egész,* $\varepsilon\in\mathbb{C}$*, és* $\varepsilon^n=i$*, akkor* $4\mid o(\varepsilon)\neq\infty$*.*

1.5.18. *Ha* ε *primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet* $o(-i\varepsilon)$*?*

1.5.19. *Ha* ε *rendje osztható néggyel, mi lesz* $-\varepsilon$ *rendje?*

3.9.4, 3.9.11. *Számítsuk ki* Φ_{12}*-t kétféleképpen, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.*

3.9.17. *Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.*

3.9.15*. *Legyenek* $m\mid n$ *pozitív egészek úgy, hogy* n *minden prímosztója osztja* m*-et is. Igazoljuk, hogy* $\Phi_n(x)=\Phi_m(x^{n/m})$*.*

3.9.16. *Számítsuk ki az előző feladat alapján a* $\Phi_n(x)$ *polinomokat abban az esetben, amikor* $n=36,72,144,100$*.*

1.1.8, 1.1.9. *Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a* $2:3$ *osztást modulo 5. Tudunk-e osztani* $\mathbb{Z}_5$ *minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?*

3.3.19. *Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat* $\mathbb{Z}_2$ *felett.*

3.9.22. *Bontsuk az* $x^{12}-1$ *polinomot irreducibilisek szorzatára* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ *és* $\mathbb{Z}_5$ *felett.*

3.5.8. *Az* $x^4+x^3+x^2+1$ *polinomot* $\mathbb{Z}_2$ *felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett.*

2.4.18. *Mely* m*-ekre van* $\mathbb{Z}_m[x]$*-ben olyan polinom, melynek több gyöke van, mint a foka?*

2.2.34. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e, mik az invertálható elemeik?*

- *a)* $\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, $\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ *a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*
- *b)* $\mathbb{C}[x]$ *páros fokú elemei és a 0 a polinomok szokásos összeadására és szorzására nézve.*
- *c)* $\mathbb{R}[x]$ *legalább huszadfokú elemei és a 0 a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*
- *d)* $\mathbb{C}[x]$ *elemei a szokásos összeadásra, és a kompozícióra, mint szorzásra.*