Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2008 nov. 18–28)

Elméleti tudnivalók: Maradékos osztás, oszthatóság (3.2, 3.1), az irreducibilitás vizsgálatának fő eszközei (3.3, 3.5). Különösen érdemes megnézni a 111. oldalon lévő táblázatot.

3.3.16. *Adjuk meg az összes olyan tizenkettedfokú valós együtthatós polinomot, melynek az $1+i$ hatszoros gyöke.*

3.2.16. *Osszuk el maradékosan az x^3-2 polinomot $2x^2+2x-3$-mal.*

3.2.23. *Mi lesz a maradék, ha az x^4+x^2+1 polinomot elosztjuk x^2+x+1-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

3.2.24. *Mi a maradék, ha $x^{64}+x^{54}+x^{14}+1$-et osztjuk x^2+1-gyel, illetve x^2-1-gyel?*

3.2.17, IHF. *Állapítsuk meg az $f(x)=3x^3+6x^2+6x+3$ és a $g(x)=2x^4+2x^2+2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.*

3.1.29. *Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölötti polinomok körében?*

3.1.6. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.*

3.3.14. *Bontsuk $6(x^2-2)(x^2+1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.*

3.5.4. *A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ (mely n-ekre?).*

3.5.5. *Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c\in\mathbb{Q}$) irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy x^4+1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

3.3.22. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x+y)^p-x^p-y^p$ polinom osztható p-vel $\mathbb{Z}[x,y]$-ban. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.*

3.5.15. *Legyen p prím és $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$. Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein az $f(x+1)$ polinomra?*

3.5.6. *A $6x^4+3x+1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

3.3.19. *Irreducibilis-e x^4+4 illetve x^4+9 a $\mathbb{Q}$ fölött? Általánosítsunk!*

3.3.24. *Bontsuk fel az x^4-10x^2+1 polinomot $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ fölötti felbontást is.*

3.5.10. *Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az x^4+x+1 polinom? És $\mathbb{R}[x]$-ben?*

IHF. *Bontsuk $x^5-2x^4+3x^3+10x^2-2x+1$-et irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ fölött.*

Fagyejev-Szominszkij, 679*. *Igazoljuk, hogy az $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, ha $a_1,\ldots,a_n$ páronként különböző egész számok.*

3.5.17*. *Van-e olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, hogy minden $g(x)$ egész együtthatós polinomra az $f\big(g(x)\big)$ polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}$ fölött?*