

Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Hatodik feladatsor (2008 okt. 18–22)

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mennyi ezeknek a mátrixoknak a sor-, illetve oszloprangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Igazoljuk az alábbiakat.

a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.

b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?

c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$ is független.

3. Oldjuk meg Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.

4. Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 8 rangú, 13×21 -es valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangja hét lesz, akkor felfallak.” Életben marad-e a királylány?

5. A sárkány a királylány hugát is meglátogatta. „Neked egy 8 rangú 8×8 -as mátrixot kell most azonnal felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát a most felírt mátrixot már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány huga életben maradt-e?

6*. Páratlanvárosban 32 lakos él. Minden klubnak csak páratlan sok tagja lehet, viszont bármely két klub közös tagjainak száma páros. Hány klub lehet maximum a városban? Lehet-e ennél több klub, ha az első feltétel helyett azt követeljük meg, hogy minden klubnak páros sok tagja legyen?

HF7. Egy szállodában hárman kivesznek egy szobát, és harminc dollárt fizetnek. Mivel a szoba csak 25 dollárba kerül, a recepció felküldi a londinert öt dollárral, aki kettőt zsebrevág, és csak egy-egy dollárt ad át a három vendégnek. Így mindhárman csak kilenc dollárt fizettek, ez 27, és a londinernél van még két dollár. Hol a harmincadik dollár?

HF8. A tízezernél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amely a 2, 3, 5 számok közül pontosan kettővel osztható?

HF9. Azokat a pozitív egészeket, amelyek öttel oszthatóak, vagy amelyek számjegyeinek összege osztható öttel, befestjük lilára. Hány olyan egymás utáni számokból álló számhármas van, amelyek mindegyike 100000-nél kisebb lila szám?

HF10. Egy 15 és egy 20 perces homokórával mérjük ki 25 percet.

HF11*. Egy 7×7 -es négyzetrács mind a 49 négyzetén egy-egy törpe áll. Sípszóra mindegyik átsétál egy csúcsban szomszédos négyzetre. Legalább hány üres négyzet keletkezik?

HF12**. Tíz ember mindegyike ismer egy-egy pletykát. Hány telefonhívással tudják elérni, hogy mindenki mindegyik pletykát megismerje? (Konferenciahívás nincs!)