Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Harmadik alkalom (2008 szept. 19 – okt. 3)

1.5.14. *Oldjuk meg az* $x^3 = 2$ *és az* $x^4 = -9$ *egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az* $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^n = -1$ *egyenletek összes megoldását is.*

1.5.24. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et.*

1.5.22. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

1.4.12. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges és egyenlő hosszú.*

1. *Az* AB, BA, BC, $CB - C$ *műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. *Adjunk meg olyan* 10×10*-es* $A \neq B$ *mátrixokat és egy* 10×100*-as* $C \neq 0$ *mátrixot, amelyekre* $AC = BC$ *teljesül. Meg lehet-e adni az* $A \neq B$ *mátrixokat úgy is, hogy ez* **minden** 10×100*-as* C*-re teljesüljön?*

3. *Számítsuk ki az* 5×5*-ös* $N = ((n_{ij}))$ *mátrix első öt hatványát, ahol* $n_{ij} = 1$, *ha* $i - j = 1$, *és* 0 *egyébként. Tegyük fel, hogy egy* $n \times n$*-es* $M = ((m_{ij}))$ *mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz* $m_{ij} = 0$ *ha* $i \geq j$*). Bizonyítsuk be, hogy* $M^n = 0$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

5. *Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

6. *Jelölje* $E^{(ij)}$ *azt a mátrixot, amelynek* i*-edik sorában a* j*-edik elem* 1, *és minden más eleme* 0. *Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk* $E^{(ij)}$*-vel? Van-e olyan* 3×3*-as* A *mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges* 3×3*-as* X *mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az* X *többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen* A *akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?*

IHF. *Az* M *és* N *mátrixok* **felcserélhetők,** *ha* $MN = NM$. *Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az* $E^{(23)}$*-mal felcserélhető (lásd az előző feladatot), és azokat is, amelyek* **minden** *háromszor hármas mátrixszal felcserélhetők.*

HF1. *Hét négyzetszám között van-e mindig kettő, melyek különbsége tízzel osztható?*

HF2. *Előáll-e* 123456789876543210 *három szomszédos egész szám szorzataként?*

HF3. *Hány futót rakhatunk a sakktáblára úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást?*

HF4. *Maximum hány pontban metszik egymást az átlók egy konvex hatszög belsejében?*

HF5. *Egy szöcske ugrál a számegyenesen. Ugrásainak hossza* 1 *egység. A nullából indulva hányféleképpen juthat el* 11 *ugrással a* +7 *pontba?*

HF6. *Legfeljebb hány részre oszthatja a síkot* n *egyenes?*