Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Első alkalom (2008 szept. 9–12)

A háromjegyű sorszámok a Kiss-jegyzetre utalnak, melyben a megoldások is elolvashatók.

1. *Alakítsuk szorzattá az* $a^3 - b^3$, *az* $a^3 + b^3$ *és az* $x^2 - 8x + 15$ *kifejezéseket.*

1.2.4. *Adjuk meg az* $u+v = 8$, $uv = 15$ *egyenletrendszer* **összes** *valós megoldását. Tegyük meg ugyanezt az* $u + v = 14$, $uv = 49$ *egyenletrendszer esetében is.*

2. *Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:*

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

1.2.8*. *A* $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$ *kifejezést kalkulátorral kiszámítva egész szám jön ki. Mutassuk meg, hogy az eredmény nem csak közelítőleg, hanem pontosan ez a szám!*

3. *Mutassuk meg, hogy ha az* m *és* n *egész számok előállnak két négyzetszám összegeként, akkor* mn *is előáll így.*

4. *A sík* (x, y) *pontját* $+90$ *fokkal elforgatjuk az origó körül. Melyik pont lesz az eredmény? És ha* $+60°$*-kal forgatunk? És ha nem az origó körül, hanem az* $(1, 2)$ *pont körül forgatunk?*

5. *Az* e_1 *és* e_2 *egyenesek párhuzamosak, távolságuk* d. *A* P *pontot először* e_1*-re, majd az eredményt* e_2*-re tükrözzük. Igazoljuk, hogy ekkor ugyanazt a pontot kapjuk, mint ha* P*-t eltoltuk volna a két egyenes irányára merőlegesen,* $2d$ *távolsággal.*

6. *Az* e_1 *és* e_2 *egyenesek* α *szöget zárnak be. A* P *pontot először* e_1*-re, majd az eredményt* e_2*-re tükrözzük. Igazoljuk, hogy ekkor ugyanazt a pontot kapjuk, mint ha* P*-t elforgattuk volna a két egyenes metészpontja körül* 2α *szöggel.*

7. *Mutassuk meg, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege.*

---

8. *Anettkának húsz tolla van, köztük piros is. Bármely öt toll között van két egyforma színű, és bármely tíz között legfeljebb öt egyforma színű lehet. Hány piros tolla van?*

9. *Hány számjegyből áll* $25^{25} \cdot 2^{50}$*?*

10. *Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely csak háromféle számjegyet tartalmaz?*

11. *Egy tábla csokoládé* $4 \cdot 9$ *kis téglalapra van osztva. A csokoládét szét szeretnénk osztani egy kirándulás 36 résztvevője között. Mindig kezünkbe veszünk egy darabot, és egy osztás mentén eltörjük. Milyen stratégiával csináljuk, hogy minél kevesebb törést kelljen végezni?*

12*. *Van 81 egyforma érménk, de az egyik hamis, könnyebb a többinél. Egy (súlyok nélküli) kétkarú mérleggel hány méréssel tudjuk megtalálni a hamisat?*

13. *Egy* 8×8*-as sakktáblából kivesszük az* $A1$ *és* $H8$ *mezőket (vagyis két átlósan átellenes sarkot). Lefedhető-e a maradék* 2×1*-es dominókkal?*

1.1.1.** *Lefedhető-e egy* 100×100*-as sakktábla* 8×1*-es dominókkal?*