Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

9. előadás

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix,
akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját
az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$f(x) = x - 2$,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját
az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját
az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$$f(x) = x - 2,\ N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$$f(x) = x - 2,\ N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját
az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$$f(x) = x - 2,\ N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$$f(x) = x - 2,\ N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A a kétszeresre nyújtás az origóból,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját
az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A - 2I = 0$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját
az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$$f(x) = x - 2,\ N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A - 2I = 0$.
($[A] = N$ tetszőleges bázisban.)

Példák behelyettesítésre

Példa

$f(x) = x^2 - 4x + 4,$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diagonális mátrix behelyettesítése

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Példák behelyettesítésre

Példa

$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Diagonális mátrix behelyettesítése

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow f(D) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n \times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n \times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.

$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.

$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.

$f(M) = aM^2 + bM + cE$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$,

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$?

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz $aM^2vM + bMuM^2 = (av + bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt!

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt! HF: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt! HF: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$
(itt $M^0 = E$).

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt! HF: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$
(itt $M^0 = E$). Vagyis M hatványai felcserélhetők.

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$,

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek,

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan.

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!

Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár).

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE$

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE$

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$.

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$.
Azaz $c = 0$,

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$.
Azaz $c = 0$, tehát $x - 2 \mid g$.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. Freud, 6.3.2 és 6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy,

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. Freud, 6.3.2 és 6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. Freud, 6.3.2 és 6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. Freud, 6.3.2 és 6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.
Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. Freud, 6.3.2 és 6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.
Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is.
Ekkor a minimálpolinom jele m_A.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. Freud, 6.3.2 és 6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.
Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is.
Ekkor a minimálpolinom jele m_A.

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $x - 2$.

A minimálpolinom kiszámítása

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

A minimálpolinom kiszámítása

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

A minimálpolinom kiszámítása

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

A minimálpolinom kiszámítása

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.

A minimálpolinom kiszámítása

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.
A minimálpolinom a karakterisztikus polinom osztói között a legalacsonyabb fokú normált polinom,

A minimálpolinom kiszámítása

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.
A minimálpolinom a karakterisztikus polinom osztói között a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek a mátrix gyöke.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz
1, $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ egyike lesz.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $k_M = x - c$,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $k_M = x - c$, akkor $M - cE = 0$,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $k_M = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $k_M = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis elsőfokú minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $k_M = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis elsőfokú minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

Következmény

Ha egy kétszer kettes mátrix nem cE alakú,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $k_M = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis elsőfokú minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

Következmény

Ha egy kétszer kettes mátrix nem cE alakú, akkor minimálpolinomja ugyanaz, mint a karakterisztikus polinomja.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei,

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x - 1)(x - 2)$.

$m(D) = 0$ (HF),

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x - 1)(x - 2)$.

$m(D) = 0$ (HF), de $(x - 1)(x - 2) \mid m_D(x)$,

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x - 1)(x - 2)$.

$m(D) = 0$ (HF), de $(x - 1)(x - 2) \mid m_D(x)$, mert 1, 2 sajátérték.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_m)$.

Példabizonyítás

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.

$m(D) = 0$ (HF), de $(x-1)(x-2) \mid m_D(x)$, mert 1, 2 sajátérték.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ minimálpolinomja $(x-2)^2$ (van kétszeres gyöke!).

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen
$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0E + a_1M + \ldots + a_{n^2}M^2 = 0$. Legyen
$g(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n^2}x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M)$

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$. Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M)$

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$. Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$. Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$. Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$. Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom, melynek M gyöke.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^2 = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^2$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$. Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$. Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom, melynek M gyöke. Ezért $r(M) = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. $\square$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$,

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$. Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor,

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv)$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v)$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v)$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v)$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.

$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.

$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$,

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v$

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 Ev + a_1 Mv + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda)v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda) v$.
Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$,

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 Ev + a_1 Mv + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda)v$.
Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$, és mivel $v \neq 0$,

Minden sajátérték gyök

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda) v$.
Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$, és mivel $v \neq 0$, ezért $f(\lambda) = 0$. $\square$

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete,

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek. □

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek. $\square$

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek. □

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk.
A bizonyításához újabb eszközök kellenek.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek. □

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk.
A bizonyításához újabb eszközök kellenek.
Lásd Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.7.6. Tétel.