Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

8. előadás

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis.

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll,

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1$,

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla),

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor
λ sajátértéke,

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ sajátértéke, v pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak.

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ sajátértéke, v pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak.
A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér $\{v : A(v) = \lambda v\}$,

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ sajátértéke, v pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak.
A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor.

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \dots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ sajátértéke, v pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak. A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. HF: ez altér.

Leképezés diagonális mátrixa

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa diagonális?

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $b_1, \ldots, b_n$ ilyen bázis. Ha $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \ldots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ sajátértéke, v pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak. A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. HF: ez altér.

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

A diagonalizálható $\iff$ van sajátvektorokból álló bázis. $\square$

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v$

A sajátértékek meghatározása

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v$$

A sajátértékek meghatározása

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v$$

A sajátértékek meghatározása

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v.$
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre.

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ **sajátérték** $\iff \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v.$
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ **sajátérték** $\iff \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0$

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$,

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v.$
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$, ezek A sajátértékei.

A sajátértékek meghatározása

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.
Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.
Így λ sajátérték $\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$, ezek A sajátértékei.

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A mátrix karakterisztikus polinomja.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér,

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$, $k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,
$k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,
$k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,
$k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$, $k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,
$k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

(3) A sajátértékek összege, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az A mátrixának nyoma,

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,
$k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

(3) A sajátértékek összege, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az A mátrixának nyoma, vagyis az $[A]$ főátlójában álló elemek összege.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,
$k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

(3) A sajátértékek összege, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az A mátrixának nyoma, vagyis az $[A]$ főátlójában álló elemek összege. Ez a k_A polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$, $k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

(3) A sajátértékek összege, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az A mátrixának nyoma, vagyis az $[A]$ főátlójában álló elemek összege. Ez a k_A polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

(4) A sajátértékek szorzata $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(A)$.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$, $k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

(3) A sajátértékek összege, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ az A mátrixának nyoma, vagyis az $[A]$ főátlójában álló elemek összege. Ez a k_A polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

(4) A sajátértékek szorzata $\lambda_1 \ldots \lambda_n = \det(A)$. Ez a k_A polinom konstans tagja.

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$, $k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

(3) A sajátértékek összege, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az A mátrixának nyoma, vagyis az $[A]$ főátlójában álló elemek összege. Ez a k_A polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

(4) A sajátértékek szorzata $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(A)$. Ez a k_A polinom konstans tagja.

Figyelni kell a gyökök multiplicitására!

A karakterisztikus polinom

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$,
$k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja,
és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n-edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

(3) A sajátértékek összege, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az A mátrixának nyoma, vagyis az $[A]$ főátlójában álló elemek összege. Ez a k_A polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

(4) A sajátértékek szorzata $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(A)$. Ez a k_A polinom konstans tagja.

Figyelni kell a gyökök multiplicitására!
Lehetőleg $\mathbb{C}$ (vagy algebrailag zárt test) fölött dolgozzunk!

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} =$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \left(\cos(\alpha) - x\right)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \left(\cos(\alpha) - x\right)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \big(\cos(\alpha) - x\big)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \big(\cos(\alpha) - x\big)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$,

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \left(\cos(\alpha) - x\right)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \left(\cos(\alpha) - x\right)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$,

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \left(\cos(\alpha) - x\right)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Legyen A mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i \sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Legyen A mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_A(x) = \det \begin{bmatrix} 2 - x & 1 \\ 0 & 2 - x \end{bmatrix} =$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Legyen A mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_A(x) = \det \begin{bmatrix} 2 - x & 1 \\ 0 & 2 - x \end{bmatrix} =$

$$= (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = \left(\cos(\alpha) - x\right)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Legyen A mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_A(x) = \det \begin{bmatrix} 2 - x & 1 \\ 0 & 2 - x \end{bmatrix} =$

$$= (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

2 az egyetlen sajátérték.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Legyen A mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_A(x) = \det \begin{bmatrix} 2 - x & 1 \\ 0 & 2 - x \end{bmatrix} =$

$$= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

2 az egyetlen sajátérték. Nyom $= 2 + 2$,

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).
Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2\cos\alpha)x + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 - (2\cos\alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, azaz komplex sajátértékek!
Az A mátrixának nyoma $2\cos\alpha$, determinánsa 1.

Legyen A mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_A(x) = \det \begin{bmatrix} 2 - x & 1 \\ 0 & 2 - x \end{bmatrix} =$

$$= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

2 az egyetlen sajátérték. Nyom $= 2 + 2$, determináns $= 2 \cdot 2$.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

Sajátvektorokból álló bázis: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

Sajátvektorokból álló bázis: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ebben $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1$$

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$SMS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M diagonalizáltja

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$SMS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M diagonalizáltja (főátlóban sajátértékek).

Diagonalizálás bázistranszformációval

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$SMS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M diagonalizáltja (főátlóban sajátértékek).

Vagyis M-et bázistranszformációval diagonális alakra hoztuk.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van,

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ és } N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális). Az M viszont nem diagonalizálható. Ha $Mv = 2v$,

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.
Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható. Ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális). Az M viszont nem diagonalizálható. Ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális). Az M viszont nem diagonalizálható. Ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff y = 0.$$

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix kartakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális). Az M viszont nem diagonalizálható. Ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff y = 0.$$

Az $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ alakú vektorok között nincs két független (azaz bázis).

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1$,

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k,$

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) =$

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_n$ független,

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_n$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_n$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző,

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_n$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_n$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$.
Mivel $v_1 \neq 0$,

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
A zöld egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_n$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$.
Mivel $v_1 \neq 0$, a zöld egyenletből $\mu_1 = 0$. $\square$

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált.

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$,

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$.

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}.$$ Ha $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}.$$ Ha $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$ és $v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$,

akkor $v_{n+1} = Mv_n$,

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}.$$ Ha $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$ és $v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$, akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$.

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$.

Vagyis a feladat az M mátrix hatványainak a kiszámítása.

Egyszerű alkalmazás

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$.
Vagyis a feladat az M mátrix hatványainak a kiszámítása.
Ehhez diagonalizáljuk az M mátrixot.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix},$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85,

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $\quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1}$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni:

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 + 0{,}85^n & 2 - 2 \cdot 0{,}85^n \\ 1 - 0{,}85^n & 1 + 2 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}.$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 + 0{,}85^n & 2 - 2\cdot 0{,}85^n \\ 1 - 0{,}85^n & 1 + 2\cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}.$$

$v_0 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$,

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 + 0{,}85^n & 2 - 2 \cdot 0{,}85^n \\ 1 - 0{,}85^n & 1 + 2 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}.$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \text{ így } v_n = M^n v_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 - 0{,}8 \cdot 0{,}85^n \\ 1 + 0{,}8 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}.$$

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$),

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis hosszú távon 66,666% autózik

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis hosszú távon $66{,}666\%$ autózik és $33{,}333\%$ tömegközlekedik.
HF: Ez nem függ a kiinduló eloszlástól (a 60%-tól)!!

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.
HF: Ez nem függ a kiinduló eloszlástól (a 60%-tól)!!

Év	autózó	tömegközlekedő
0	40%	60%
1	44%	56%
2	47%	53%
5	55%	45%
10	61%	39%
20	66%	34%

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.
HF: Ez nem függ a kiinduló eloszlástól (a 60%-tól)!!

Év	autózó	tömegközlekedő
0	40%	60%
1	44%	56%
2	47%	53%
5	55%	45%
10	61%	39%
20	66%	34%

Az eredeti föltevések fiktívek!