Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

7. előadás

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer **rangja** az általa generált altér dimenziója.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független,

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer **rangja** az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben.

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz F független,

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő. A múltkori 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A múltkori 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
A függés tranzitivitása miatt $\langle X \rangle$ minden eleme függ F-től.

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A múltkori 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
A függés tranzitivitása miatt $\langle X \rangle$ minden eleme függ F-től.
Vagyis F bázis az $\langle X \rangle$-ben,

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A múltkori 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
A függés tranzitivitása miatt $\langle X \rangle$ minden eleme függ F-től.
Vagyis F bázis az $\langle X \rangle$-ben, és így F elemszáma az X rangja.

Jele: $r(X)$.

Vektorrendszer rangja

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A múltkori 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
A függés tranzitivitása miatt $\langle X \rangle$ minden eleme függ F-től.
Vagyis F bázis az $\langle X \rangle$-ben, és így F elemszáma az X rangja.

Azaz a rang a maximális függetlenek elemszáma. Jele: $r(X)$.

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ **rangja** a képtér dimenziója:

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ **rangja** a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja:

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ **rangja** a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben.

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \dots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ **rangja** a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ **rangja** a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,
mert $w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ izomorfizmus,

Lineáris leképezés rangja

Definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,
mert $w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ izomorfizmus, így megőrzi a rangot (HF).

Összeg rangja

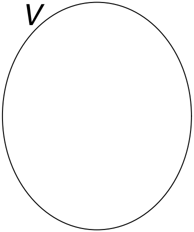
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.

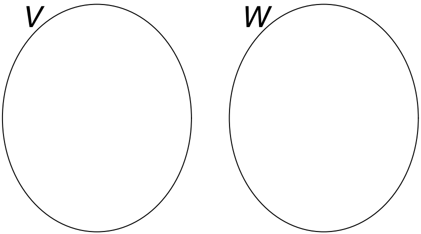
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



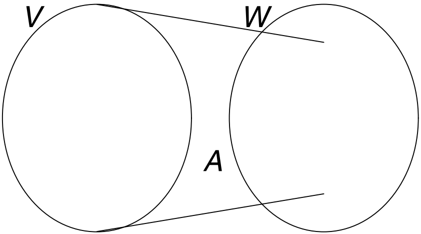
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



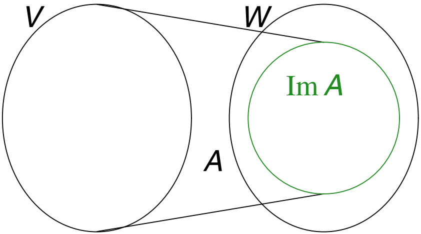
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



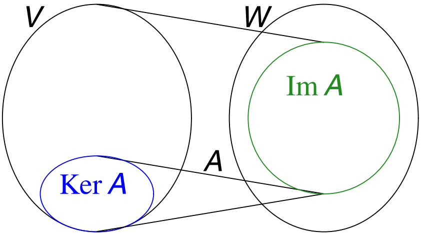
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



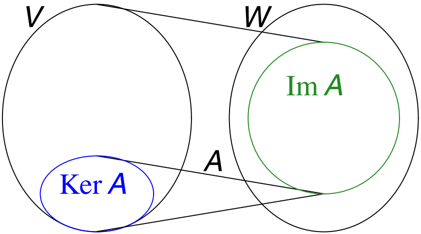
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



Összeg rangja

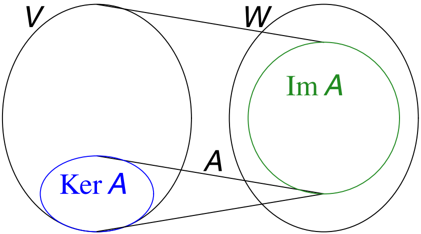
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$

Összeg rangja

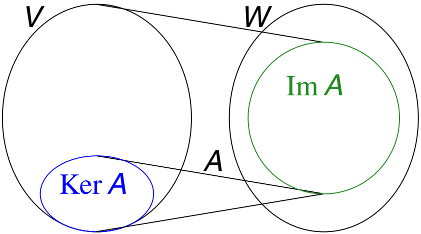
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.

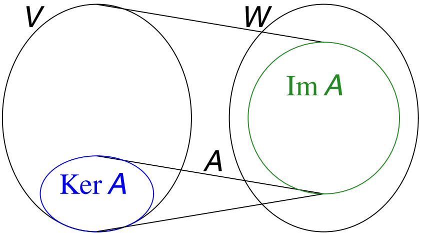


$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.

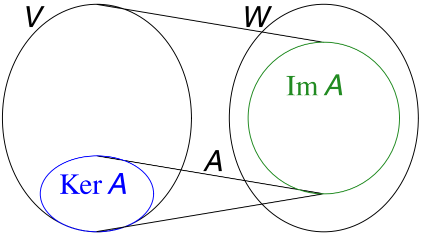


$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\Longrightarrow \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$$
$$\Longrightarrow \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



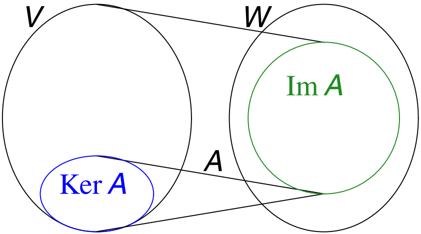
$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\Longrightarrow \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$$
$$\Longrightarrow \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$$

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\implies \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$$
$$\implies \quad r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$$

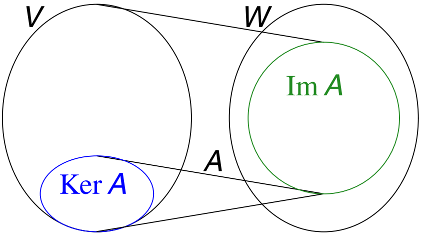
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Bizonyítás

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$$
$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$$

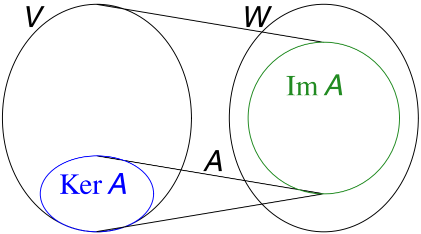
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Bizonyítás

$r(A+B) = \dim \mathrm{Im}(A+B)$. HF: $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

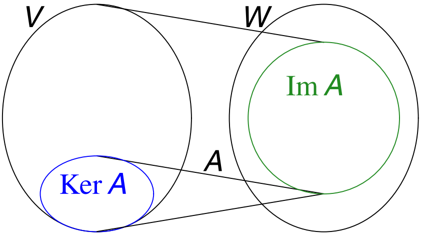
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Bizonyítás

$r(A+B) = \dim \mathrm{Im}(A+B)$. HF: $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$$
$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$$

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Bizonyítás

$r(A+B) = \dim \mathrm{Im}(A+B)$. HF: $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,
mert $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$ (gyakorlaton).

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre,

Szorzat rangja

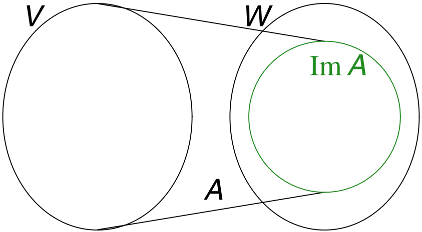
Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

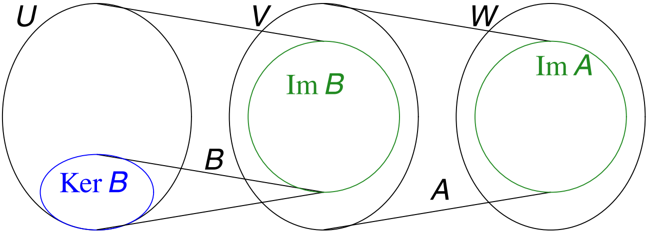
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

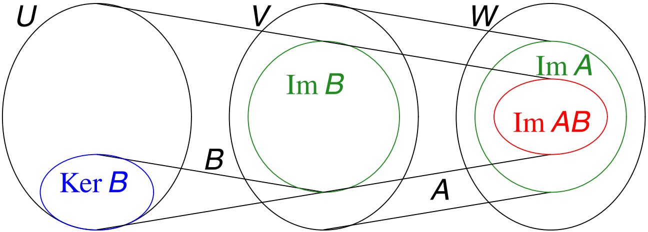
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

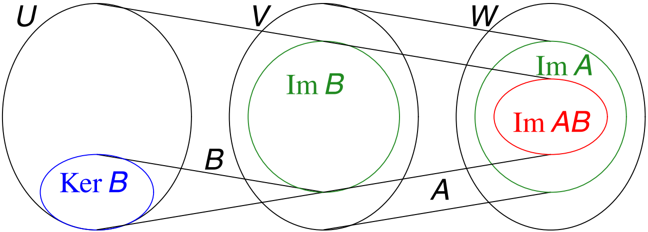
$r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



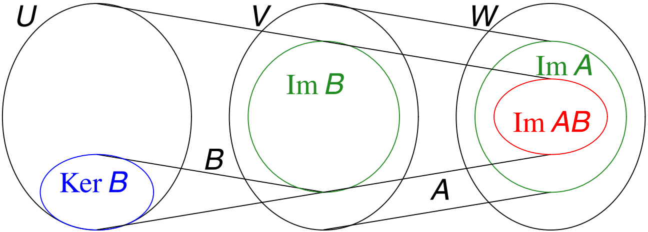
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



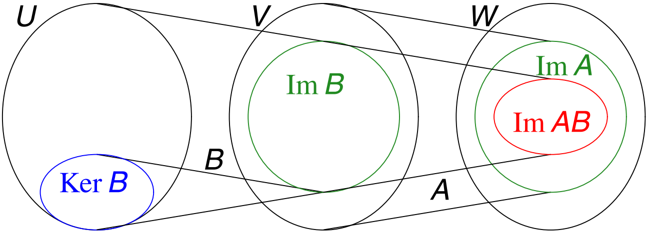
Bizonyítás

Mivel $\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A$, így $r(AB) = \dim \operatorname{Im} AB \le \dim \operatorname{Im} A = r(A)$.

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



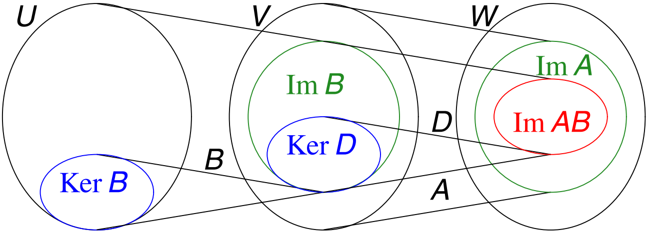
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$.

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



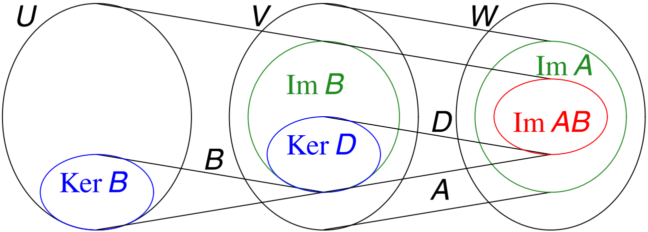
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$.

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



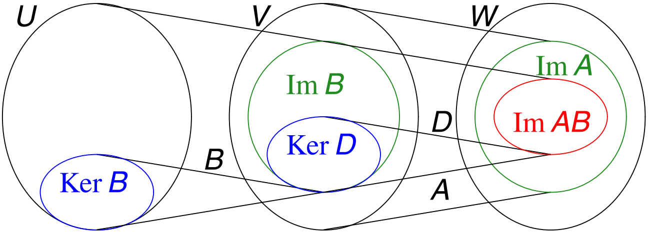
Bizonyítás

Mivel $\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A$, így $r(AB) = \dim \operatorname{Im} AB \le \dim \operatorname{Im} A = r(A)$.
Legyen $D : \operatorname{Im} B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\operatorname{Im}(D) = \operatorname{Im}(AB)$.

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



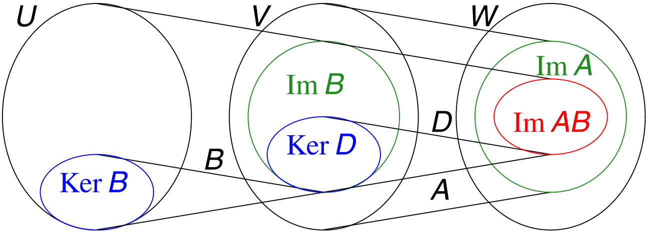
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\, D + \dim \mathrm{Ker}\, D = \dim \mathrm{Im}\, B$.

Szorzat rangja

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)

$r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \le \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\, D + \dim \mathrm{Ker}\, D = \dim \mathrm{Im}\, B$.
Így $r(AB) = r(D) = \dim \mathrm{Im}\, D \le \dim \mathrm{Im}\, B = r(B)$. $\square$

A diád fogalma

Definíció

Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

A diád fogalma

Definíció

Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

$$uv = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

A diád fogalma

Definíció

Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

$$uv = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

A diád fogalma

Definíció

Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

$$uv = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

Állítás

A diád rangja 1, ha u és v egyike sem nulla (különben nulla).

A diád fogalma

Definíció

Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

$$uv = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

Állítás

A diád rangja 1, ha u és v egyike sem nulla (különben nulla). Megfordítva, minden (legfeljebb) 1 rangú mátrix diád.

A diád fogalma

Definíció

Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

$$uv = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

Állítás

A diád rangja 1, ha *u* és *v* egyike sem nulla (különben nulla). Megfordítva, minden (legfeljebb) 1 rangú mátrix diád.

Bizonyítás

Az 1-rangú mátrixok azok, melyekben van egy nem nulla oszlop,

A diád fogalma

Definíció

Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

$$uv = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

Állítás

A diád rangja 1, ha u és v egyike sem nulla (különben nulla). Megfordítva, minden (legfeljebb) 1 rangú mátrix diád.

Bizonyítás

Az 1-rangú mátrixok azok, melyekben van egy nem nulla oszlop, és a többi oszlop ennek skalárszorosa. $\square$

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére,

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád,

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k)$

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k)$

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k) \leq k$.

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor
$r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k) \leq k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k) \leq k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \neq 0$,

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \le r(D_1) + \ldots + r(D_k) \le k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \ne 0$, u az M első oszlopa

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \le r(D_1) + \ldots + r(D_k) \le k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \ne 0$, u az M első oszlopa és $v = \begin{bmatrix} 1 & m_{12}/m_{11} & \ldots & m_{1n}/m_{11} \end{bmatrix}$.

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k) \leq k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \neq 0$, u az M első oszlopa és $v = \begin{bmatrix} 1 & m_{12}/m_{11} & \ldots & m_{1n}/m_{11} \end{bmatrix}$.
Ekkor $M - uv$ első sora és oszlopa végig nulla.

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k) \leq k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \neq 0$, u az M első oszlopa és $v = \begin{bmatrix} 1 & m_{12}/m_{11} & \ldots & m_{1n}/m_{11} \end{bmatrix}$.
Ekkor $M - uv$ első sora és oszlopa végig nulla.
Az eljárást további nem nulla elemekkel folytatjuk,

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor $r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k) \leq k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \neq 0$, u az M első oszlopa és $v = \begin{bmatrix} 1 & m_{12}/m_{11} & \ldots & m_{1n}/m_{11} \end{bmatrix}$.
Ekkor $M - uv$ első sora és oszlopa végig nulla.
Az eljárást további nem nulla elemekkel folytatjuk, amelyek mindig új sorban és új oszlopban vannak.

Felbontás diádok összegére

Tétel

Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás

Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor
$r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \leq r(D_1) + \ldots + r(D_k) \leq k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \neq 0$,
u az M első oszlopa és $v = \begin{bmatrix} 1 & m_{12}/m_{11} & \ldots & m_{1n}/m_{11} \end{bmatrix}$.
Ekkor $M - uv$ első sora és oszlopa végig nulla.
Az eljárást további nem nulla elemekkel folytatjuk, amelyek mindig új sorban és új oszlopban vannak.
Be lehet bizonyítani, hogy az eljárás $r(M)$ lépésben véget ér.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja. Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja. Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt,

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját:

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja. Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M + N)^T = M^T + N^T$

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád,

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád, mert $(uv)^T = v^T u^T$.

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád, mert $(uv)^T = v^T u^T$.
Ha $M = D_1 + \ldots + D_r$, ahol a D_j diád és $r = r(M)$,

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád, mert $(uv)^T = v^T u^T$.
Ha $M = D_1 + \ldots + D_r$, ahol a D_j diád és $r = r(M)$,
akkor $M^T = D_1^T + \ldots + D_r^T$,

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád, mert $(uv)^T = v^T u^T$.
Ha $M = D_1 + \ldots + D_r$, ahol a D_j diád és $r = r(M)$,
akkor $M^T = D_1^T + \ldots + D_r^T$, és így $r(M) = r \geq r(M^T)$.

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt,
Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád, mert $(uv)^T = v^T u^T$.
Ha $M = D_1 + \ldots + D_r$, ahol a D_j diád és $r = r(M)$,
akkor $M^T = D_1^T + \ldots + D_r^T$, és így $r(M) = r \geq r(M^T)$.
Ezt M helyett M^T-ra alkalmazva $r(M^T) \geq r\big((M^T)^T\big)$

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt, Gauss-elimináció felhasználásával.

A transzponált rangja

Tétel

A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja.
Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás

Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád, mert $(uv)^T = v^T u^T$.
Ha $M = D_1 + \ldots + D_r$, ahol a D_j diád és $r = r(M)$,
akkor $M^T = D_1^T + \ldots + D_r^T$, és így $r(M) = r \geq r(M^T)$.
Ezt M helyett M^T-ra alkalmazva $r(M^T) \geq r\big((M^T)^T\big) = r(M)$. $\square$

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt,
Gauss-elimináció felhasználásával.

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy,
hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix
determinánsa nem nulla;

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy,
hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix
determinánsa nem nulla;

(2) de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (Freud, 3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő az oszloprangjával.

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix **determinánsragja** r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (Freud, 3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő az oszloprangjával.

Bizonyítás: nincs.

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r + 1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (Freud, 3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő az oszloprangjával.

Bizonyítás: nincs.

Mivel M-nek és M transzponáltjának a determinánsrangja a transzponált determinánsról szóló tétel miatt ugyanaz,

Determinánsrang

Definíció

Az M mátrix determinánsragja r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy,
hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix
determinánsa nem nulla;

(2) de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (Freud, 3.4.2. Tétel)

Minden mátrix determinánsragja egyenlő az oszloprangjával.

Bizonyítás: nincs.
Mivel M-nek és M transzponáltjának a determinánsrangja
a transzponált determinánsról szóló tétel miatt ugyanaz,
ezért egy harmadik bizonyítást kapunk arra,
hogy a sor- és oszloprang egyenlő.

A kibővített mátrix

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n
\end{gathered}
$$

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}
$$

A kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.
$$

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

A kibővített mátrix

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

$$[M, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$ a kibővített mátrix.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg,

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával:

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű,

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis ez a rang egyenlő az ismeretlenek számával).

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis ez a rang egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben,

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis ez a rang egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben, vagyis ha M és $[M, b]$ oszlopai ugyanazt az alteret generálják.

A megoldhatóság jellemzése

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)

Legyen $M \in T^{n\times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis ez a rang egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat

Akkor és csak akkor van megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben, vagyis ha M és $[M, b]$ oszlopai ugyanazt az alteret generálják. Akkor és csak akkor egyértelmű a megoldás, ha M oszlopai lineárisan függetlenek is.