Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

5. előadás

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött,

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött,
$b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött,
$b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok.

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor

$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) =$

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor

$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó,

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez
$\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) =$

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez
$\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) =$
mert A skalárszorostartó.

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \le j \le n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez
$\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$,
mert A skalárszorostartó.

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez
$\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$,
mert A skalárszorostartó. Azaz A értékét V minden elemén ki tudjuk számítani,

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez
$\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$,
mert A skalárszorostartó. Azaz A értékét V minden elemén ki tudjuk számítani, és így csak egy megfelelő A leképezés létezhet.

Az előírhatósági tétel

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött, $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok. Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \le j \le n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez
$\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$,
mert A skalárszorostartó. Azaz A értékét V minden elemén ki tudjuk számítani, és így csak egy megfelelő A leképezés létezhet. Az egyértelműséget tehát beláttuk.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó,

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$,

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,
azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1)c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,
azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.
A skalárszorostartás bizonyítása hasonló: HF.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,
azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.
A skalárszorostartás bizonyítása hasonló: HF.
Mivel $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 0 \cdot b_n$,

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,
azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.
A skalárszorostartás bizonyítása hasonló: HF.
Mivel $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 0 \cdot b_n$,
ezért $A(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \ldots + 0 \cdot c_n = c_1$.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$.
Ez jóldefiniált, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A összegtartó, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,
azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.
A skalárszorostartás bizonyítása hasonló: HF.
Mivel $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 0 \cdot b_n$,
ezért $A(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \ldots + 0 \cdot c_n = c_1$.
Hasonlóan $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben,

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa

a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa
a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \Big] \in T^{m \times n}$.

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa
a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \Big] \in T^{m \times n}$.

A mátrix j-edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a $\mathbf{d}$ bázisban.

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa
a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \Big] \in T^{m \times n}$.

A mátrix j-edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a **d** bázisban.

Azaz $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa
a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\Big] \in T^{m\times n}$.

A mátrix j-edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a $\mathbf{d}$ bázisban.

Azaz $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy

$A(b_1) = \lambda_{11} d_1 + \ldots + \lambda_{m1} d_m$,

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa
a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\Big] \in T^{m \times n}$.

A mátrix j-edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a $\mathbf{d}$ bázisban.

Azaz $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy

$A(b_1) = \lambda_{11} d_1 + \ldots + \lambda_{m1} d_m,$

$\ldots,$

$A(b_n) = \lambda_{1n} d_1 + \ldots + \lambda_{mn} d_m.$

Mátrix bázispárban

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa
a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\Big] \in T^{m \times n}$.

A mátrix j-edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a $\mathbf{d}$ bázisban.

Azaz $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy

$A(b_1) = \lambda_{11} d_1 + \ldots + \lambda_{m1} d_m,$

$\ldots,$

$A(b_n) = \lambda_{1n} d_1 + \ldots + \lambda_{mn} d_m.$

Az előző félév példáiban a sík szokásos bázisa szerepelt.

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között,

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor

$A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és

$B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér.

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és $B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér.

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és $B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek,

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és $B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz A és B mátrixa különböző.

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és $B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz A és B mátrixa különböző.

Ha adott egy $M \in T^{m\times n}$ mátrix,

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és $B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz A és B mátrixa különböző.

Ha adott egy $M \in T^{m\times n}$ mátrix, akkor annak oszlopvektorai egy $c_1, \ldots, c_m$ vektorrendszert adnak W-ben,

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme egyértelműen írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és $B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz A és B mátrixa különböző.

Ha adott egy $M \in T^{m\times n}$ mátrix, akkor annak oszlopvektorai egy $c_1, \ldots, c_m$ vektorrendszert adnak W-ben, és az előírhatósági tételből kapott A leképezésnek M lesz a mátrixa.

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$,

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A+B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A+B$ definíciója miatt.

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A + B$ definíciója miatt. Így
$[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} =$

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A+B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A+B$ definíciója miatt. Így $[(A+B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}$.

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A + B$ definíciója miatt. Így $[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}$. Vagyis $A + B$ mátrixának oszlopai az A, illetve a B mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei.

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A + B$ definíciója miatt. Így $[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}$. Vagyis $A + B$ mátrixának oszlopai az A, illetve a B mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei. A mátrixok összeadásának definíciója miatt tehát $[A + B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} + [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Mátrixok és leképezések: összegtartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés összegtartó $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A + B$ definíciója miatt. Így $[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}$.
Vagyis $A + B$ mátrixának oszlopai az A, illetve a B mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei. A mátrixok összeadásának definíciója miatt tehát $[A + B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} + [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.
Ez jelenti azt, hogy $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ összegtartó.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$,

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$
a λA definíciója miatt.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$ a λA definíciója miatt. Így
$[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} =$

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$
a λA definíciója miatt. Így
$[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda [A(b_i)]_{\mathbf{d}}$.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$
a λA definíciója miatt. Így
$[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda [A(b_i)]_{\mathbf{d}}$.
Vagyis λA mátrixának oszlopai az A mátrixából
vett megfelelő oszlopok λ-szorosai.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$ a λA definíciója miatt. Így $[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda[A(b_i)]_{\mathbf{d}}$.
Vagyis λA mátrixának oszlopai az A mátrixából vett megfelelő oszlopok λ-szorosai. A mátrixok λ-szorosának definíciója miatt tehát $[\lambda A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \lambda[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)

Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés lineáris és bijektív $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

Már csak a skalárszorostartást kell belátni.
$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$ a λA definíciója miatt. Így $[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda [A(b_i)]_{\mathbf{d}}$.
Vagyis λA mátrixának oszlopai az A mátrixából vett megfelelő oszlopok λ-szorosai. A mátrixok λ-szorosának definíciója miatt tehát $[\lambda A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \lambda [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.
Ez jelenti azt, hogy $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ skalárszorostartó.

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben,

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben,

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$.

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a $\mathbf{b}$).

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$.

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} =$$

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} =$$

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk: $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n) =$

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk: $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n)$,

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk: $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n)$, és hogy $A(b_j) = \lambda_{1j} d_1 + \ldots + \lambda_{mj} d_m$.

Vektor képének kiszámítása

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$. Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk: $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n)$, és hogy $A(b_j) = \lambda_{1j} d_1 + \ldots + \lambda_{mj} d_m$. Behelyettesítve $A(v) = (\lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n) d_1 + \ldots + (\lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n) d_m$.

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen $\mathbf{a}$ bázis U-ban,

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben,

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen $\mathbf{a}$ bázis U-ban, $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben,

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen $\mathbf{a}$ bázis U-ban, $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$.

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen $\mathbf{a}$ bázis U-ban, $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a $\mathbf{b}$).

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a **b**).

Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze:

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a **b**).

Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}^{-1}$.

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a **b**).

Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]^{-1}_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Bizonyítás

$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} =$

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a **b**).

Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]^{-1}_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Bizonyítás

$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}},$

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik" a **b**).

Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]^{-1}_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Bizonyítás

$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$, ami az egységmátrix.

Szorzat mátrixa

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)

Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a **b**).

Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]^{-1}_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Bizonyítás

$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$, ami az egységmátrix.
Hasonlóan $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}$ is az egységmátrix.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus,

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W izomorf vektorterek,

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű. A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus. Jele: $V \cong W$.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű. A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus. Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa

Ha V vektortér a T test fölött, és $\mathbf{b}$ bázis V-ben,

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.
Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa

Ha V vektortér a T test fölött, és $\mathbf{b}$ bázis V-ben,
akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.
Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa

Ha V vektortér a T test fölött, és $\mathbf{b}$ bázis V-ben,
akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között.
Ezért minden V vektortér izomorf $T^{\dim(V)}$-vel.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.
Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa

Ha V vektortér a T test fölött, és $\mathbf{b}$ bázis V-ben,
akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között.
Ezért minden V vektortér izomorf $T^{\dim(V)}$-vel.

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.
Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa

Ha V vektortér a T test fölött, és **b** bázis V-ben,
akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között.
Ezért minden V vektortér izomorf $T^{\dim(V)}$-vel.

Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben.
Ekkor $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ izomorfizmus $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Példák izomorfizmusra

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)

Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ izomorfizmus, ha kölcsönösen egyértelmű.
A V és W izomorf vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus.
Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa

Ha V vektortér a T test fölött, és $\mathbf{b}$ bázis V-ben,
akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között.
Ezért minden V vektortér izomorf $T^{\dim(V)}$-vel.

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
Ekkor $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ izomorfizmus $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.
Vagyis $\mathrm{Hom}(V, W) \cong T^{\dim(W) \times \dim(V)}$.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf,

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\left(\mathrm{Hom}(V, W)\right) = \dim(V)\dim(W)$.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\left(\operatorname{Hom}(V, W)\right) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.

Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések,

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.
Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris
leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.
Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\left(\mathrm{Hom}(V, W)\right) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.
Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.
Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.
Megfordítva: ha $A : V \to W$ izomorfizmus

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.
Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.
Megfordítva: ha $A : V \to W$ izomorfizmus és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.
Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.
Megfordítva: ha $A : V \to W$ izomorfizmus és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, akkor HF: $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ bázis W-ben.

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér
akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\left(\mathrm{Hom}(V, W)\right) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő.
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben.
Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris
leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.
Megfordítva: ha $A : V \to W$ izomorfizmus és $b_1, \ldots, b_n$
bázis V-ben, akkor HF: $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ bázis W-ben.
Ezért a két dimenzió megegyezik.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}} \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}} \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\right] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}} \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban. Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \Big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\Big] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Jelölje $S = \left[[d_1]_\mathbf{b}, \ldots, [d_n]_\mathbf{b} \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban. Ekkor $[v]_\mathbf{d} = S^{-1}[v]_\mathbf{b}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \left[[d_1]_\mathbf{b}, \ldots, [d_n]_\mathbf{b} \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_\mathbf{d} = S^{-1}[v]_\mathbf{b}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}} \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban. Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re. Nyilván $C = B^{-1}$,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \Big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\Big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \Big[[d_1]_\mathbf{b}, \ldots, [d_n]_\mathbf{b}\Big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_\mathbf{d} = S^{-1}[v]_\mathbf{b}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ (az egységmátrix).

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}} \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban. Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re. Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$. Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban. Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re. Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$. Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix). Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} =$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\right] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} =$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Jelölje $S = \left[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban. Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} =$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \Big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\Big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$.
A másik állítás HF az $A = BCABC$ felhasználásával.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \Big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\Big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$.
A másik állítás HF az $A = BCABC$ felhasználásával.

HF: $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek **b** és **d** bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \dots, [d_n]_{\mathbf{b}}\big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a **d** vektorainak koordinátái állnak a **b** bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$.
A másik állítás HF az $A = BCABC$ felhasználásával.

HF: $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S$ és $[C]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}$.

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó,

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha **b** ortonormált bázis,

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha **b** ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált **d** bázist,

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha **b** ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált **d** bázist, ha az áttérést leíró S mátrix ortogonális,

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha **b** ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált **d** bázist, ha az áttérést leíró S mátrix ortogonális, azaz $S^{-1} = S^T$.

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha **b** ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált **d** bázist, ha az áttérést leíró S mátrix ortogonális, azaz $S^{-1} = S^T$. Ekkor a bázis-transzformáció képlete

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha **b** ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált **d** bázist, ha az áttérést leíró S mátrix ortogonális, azaz $S^{-1} = S^T$. Ekkor a bázistranszformáció képlete $[v]_{\mathbf{d}} = S^T[v]_{\mathbf{b}}$

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha **b** ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált **d** bázist, ha az áttérést leíró S mátrix ortogonális, azaz $S^{-1} = S^T$. Ekkor a bázistranszformáció képlete $[v]_{\mathbf{d}} = S^T[v]_{\mathbf{b}}$ és $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^T[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Távolságtartó transzformációk

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)

Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve ortogonális transzformáció.

Ha $\mathbf{b}$ ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált $\mathbf{d}$ bázist, ha az áttérést leíró S mátrix ortogonális, azaz $S^{-1} = S^T$. Ekkor a bázistranszformáció képlete $[v]_{\mathbf{d}} = S^T[v]_{\mathbf{b}}$ és $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^T[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás a következő félévben.