

Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

4. előadás

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$,

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér,

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) =$

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

Azaz $U + W$ **zárt az összeadásra**.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

Azaz $U + W$ **zárt az összeadásra**.

A λ -szorosra való zártság bizonyítása hasonló: **HF**.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

Azaz $U + W$ **zárt az összeadásra**.

A λ -szorosra való zártság bizonyítása hasonló: **HF**.

$U + W$ a **legsűkebb** U -t és W -t tartalmazó altér.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.

Ez az U és W alterek **összege**.

Bizonyítás

$U + W$ **nem üres**, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

Azaz $U + W$ **zárt az összeadásra**.

A λ -szorosra való zártság bizonyítása hasonló: **HF**.

$U + W$ a **legsűkebb** U -t és W -t tartalmazó altér. Hiszen minden ilyen altér tartalmazza az $u + w$ alakú összegeket.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ felső,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Ez **sem egyértelmű**.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x -tengely és W az y -tengely.

$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez **egyértelmű** is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke.

Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = (f(x) - f(1)) + f(1)$.

Ez **nem egyértelmű**, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is.

$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Ez **sem egyértelmű**. $U \cap W$ a diagonális mátrixok.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. A bal oldal U -ban,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\},$$

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Innen $u_1 = u_2$

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$. Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.

Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.

Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0 + v = v + 0$ is megfelelő,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor **egyértelmű**, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

A bal oldal U -ban, a jobb oldal W -ben van. Tehát

$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.

Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0 + v = v + 0$ is megfelelő, így a fölírás **nem egyértelmű**.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása **egyértelmű**,

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$,

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**,

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$)

alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$,

akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$)

alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$,

akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$)

alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$,

akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U -nak.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$)

alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$,

akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U -nak.

Ekkor a tér $U \oplus W$.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$)

alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$,

akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U -nak.

Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U -nak.

Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.

W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan.

Direkt összeg

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$)

alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap W = \{0\}$,

akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U -nak.

Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.

W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan.

Ekkor $T[x] = U \oplus W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben,
akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben,

akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben,

akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$),

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben,

akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$),

akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így

$u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így

$$u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m.$$

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m)$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így

$$u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m.$$

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$.

Mivel b_1, \dots, b_n független,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$.

Mivel b_1, \dots, b_n független, ezért $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.

Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$.

Mivel b_1, \dots, b_n független, ezért $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Mivel c_1, \dots, c_m független,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha b_1, \dots, b_n bázis U -ban és c_1, \dots, c_m bázis W -ben,
akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$ -ben.

Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U, w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$, és így
 $u + w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m$.

Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \dots + \mu_m c_m = 0$.

Mivel b_1, \dots, b_n független, ezért $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Mivel c_1, \dots, c_m független, ezért $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. □

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V -ben

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V -ben és b_1, \dots, b_n bázis **U -ban**.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V -ben és b_1, \dots, b_n bázis **U -ban**.
Ezt egészítsük ki a c_1, \dots, c_m vektorokkal V egy bázisává.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V -ben és b_1, \dots, b_n bázis **U -ban**.

Ezt egészítsük ki a c_1, \dots, c_m vektorokkal V egy bázisává.

Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V -ben és b_1, \dots, b_n bázis **U -ban**.

Ezt egészítsük ki a c_1, \dots, c_m vektorokkal V egy bázisává.

Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

Legyen $W = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V -ben és b_1, \dots, b_n bázis **U -ban**.

Ezt egészítsük ki a c_1, \dots, c_m vektorokkal V egy bázisává.

Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

Legyen $W = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$. Ekkor $V = U \oplus W$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V -ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) **direkt kiegészítő altere**.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V -ben és b_1, \dots, b_n bázis **U -ban**.

Ezt egészítsük ki a c_1, \dots, c_m vektorokkal V egy bázisává.

Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

Legyen $W = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$. Ekkor $V = U \oplus W$.

A bizonyítás hasonló az előző tételéhez: **HF**.

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak),

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$.

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$.

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben,

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U **ortogonalis kiegészítő altere**.

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U **ortogonalis kiegészítő altere**.

Állítás

Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U **ortogonalis kiegészítő altere**.

Állítás

Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Bizonyításvázlat

$$U \cap U^\perp = \{0\},$$

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U **ortogonalis kiegészítő altere**.

Állítás

Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Bizonyításvázlat

$U \cap U^\perp = \{0\}$, mert csak a nullvektor merőleges önmagára.

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U **ortogonalis kiegészítő altere**.

Állítás

Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Bizonyításvázlat

$U \cap U^\perp = \{0\}$, mert csak a nullvektor merőleges önmagára. Olyan b_1, \dots, b_n ortonormált bázist készítünk \mathbb{R}^n -ben,

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U **ortogonalis kiegészítő altere**.

Állítás

Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Bizonyításvázlat

$U \cap U^\perp = \{0\}$, mert csak a nullvektor merőleges önmagára. Olyan b_1, \dots, b_n ortonormált bázist készítünk \mathbb{R}^n -ben, melyenek első néhány vektora ortonormált bázis U -ban.

Ortogonalis kiegészítő altér

Definíció

Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok **merőlegesek** (ortogonalisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U **ortogonalis kiegészítő altere**.

Állítás

Ha U altér \mathbb{R}^n -ben, akkor $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Bizonyításvázlat

$U \cap U^\perp = \{0\}$, mert csak a nullvektor merőleges önmagára. Olyan b_1, \dots, b_n ortonormált bázist készítünk \mathbb{R}^n -ben, melyenek első néhány vektora ortonormált bázis U -ban. Eszköz: **Gram–Schmidt-ortogonalizáció** (következő félévben).

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**,

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**,

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába,

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába,
azaz $A(0_V) = 0_W$

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe

visz, azaz $A(0_V) = 0_W$

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz, azaz $A(0_V) = 0_W$ és $A(-v) = -A(v)$.

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz, azaz $A(0_V) = 0_W$ és $A(-v) = -A(v)$.

Bizonyítási ötlet az első állításra

$$A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V),$$

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz, azaz $A(0_V) = 0_W$ és $A(-v) = -A(v)$.

Bizonyítási ötlet az első állításra

$$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V),$$

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek **UGYANAZON** T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ **lineáris leképezés**, ha

(1) **összegtartó**, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén

$$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2);$$

(2) **skalárszorostartó**, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz, azaz $A(0_V) = 0_W$ és $A(-v) = -A(v)$.

Bizonyítási ötlet az első állításra

$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V)$, adjunk hozzá $-A(0_V)$ -t.

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött,

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen **$A(v) = Mv$** .

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen **$A(v) = Mv$** .
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött,

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen **$A(v) = Mv$** .
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, **$A(p) = p'$** (a p polinom deriváltja).

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen **$A(v) = Mv$** .
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, **$A(p) = p'$** (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen **$A(v) = Mv$** .
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, **$A(p) = p'$** (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen **$A(v) = Mv$** .
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, **$A(p) = p'$** (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és **$A(v) = [v]_B$** .

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen **$A(v) = Mv$** .
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, **$A(p) = p'$** (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és **$A(v) = [v]_B$** .
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, **$A(v) = 0_W$** .
Ez a **nulla leképezés**,

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.
Ez a **nulla leképezés**, jele 0 .

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.
Ez a **nulla leképezés**, jele 0 .
- (7) $V = W$ tetszőleges vektortér,

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.
Ez a **nulla leképezés**, jele 0 .
- (7) $V = W$ tetszőleges vektortér, $A(v) = v$.

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.
Ez a **nulla leképezés**, jele 0 .
- (7) $V = W$ tetszőleges vektortér, $A(v) = v$.
Ez az **identikus leképezés**,

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.
Ez a **nulla leképezés**, jele 0 .
- (7) $V = W$ tetszőleges vektortér, $A(v) = v$.
Ez az **identikus leképezés**, jele I .

Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló **egybevágósági** és **hasonlósági** transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése).
Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.
Ez a **nulla leképezés**, jele 0 .
- (7) $V = W$ tetszőleges vektortér, $A(v) = v$.
Ez az **identikus leképezés**, jele I vagy I_V .

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

(1) A és B **összege** $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

- (1) A és B **összege** $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.
- (2) A **λ -szorosa** $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

- (1) A és B **összege** $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.
- (2) A **λ -szorosa** $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Állítás (Freud, 5.1.3. Tétel)

Két lineáris leképezés összege,

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

- (1) A és B **összege** $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.
- (2) A **λ -szorosa** $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Állítás (Freud, 5.1.3. Tétel)

Két lineáris leképezés összege, és egy lineáris leképezés skalárszorosa is lineáris leképezés.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

- (1) A és B **összege** $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.
- (2) A **λ -szorosa** $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Állítás (Freud, 5.1.3. Tétel)

Két lineáris leképezés összege, és egy lineáris leképezés skalárszorosa is lineáris leképezés.

Erre a két műveletre $\text{Hom}(V, W)$ **vektorteret** alkot.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

- (1) A és B **összege** $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.
- (2) A **λ -szorosa** $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Állítás (Freud, 5.1.3. Tétel)

Két lineáris leképezés összege, és egy lineáris leképezés skalárszorosa is lineáris leképezés.

Erre a két műveletre $\text{Hom}(V, W)$ **vektorteret** alkot.

Nullelem: a nulla leképezés.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

- (1) A és B **összege** $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.
- (2) A **λ -szorosa** $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Állítás (Freud, 5.1.3. Tétel)

Két lineáris leképezés összege, és egy lineáris leképezés skalárszorosa is lineáris leképezés.

Erre a két műveletre $\text{Hom}(V, W)$ **vektorteret** alkot.

Nullelem: a nulla leképezés. Az A ellentettje: $(-A)(v) = -A(v)$.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Legyen $A, B \in \text{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

- (1) A és B **összege** $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.
- (2) A **λ -szorosa** $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Állítás (Freud, 5.1.3. Tétel)

Két lineáris leképezés összege, és egy lineáris leképezés skalárszorosa is lineáris leképezés.

Erre a két műveletre $\text{Hom}(V, W)$ **vektorteret** alkot.

Nullelem: a nulla leképezés. Az A ellentettje: $(-A)(v) = -A(v)$.

FONTOS házi feladat önállóan kidolgozni a bizonyítást!

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata**

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$,

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$, elemei lineáris **transzformációk**.

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$, elemei lineáris **transzformációk**.

Állítás (Freud, 5.6.3. Tétel)

Ha V vektortér, akkor $\text{Hom}(V)$ **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra,

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$, elemei lineáris **transzformációk**.

Állítás (Freud, 5.6.3. Tétel)

Ha V vektortér, akkor $\text{Hom}(V)$ **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és $\lambda(AB) = (\lambda A)B$

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$, elemei lineáris **transzformációk**.

Állítás (Freud, 5.6.3. Tétel)

Ha V vektortér, akkor $\text{Hom}(V)$ **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$, elemei lineáris **transzformációk**.

Állítás (Freud, 5.6.3. Tétel)

Ha V vektortér, akkor $\text{Hom}(V)$ **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ ($A, B \in \text{Hom}(V)$, $\lambda \in T$).

Lineáris leképezések szorzata

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések **szorzata** (kompozíciója) $(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$, elemei lineáris **transzformációk**.

Állítás (Freud, 5.6.3. Tétel)

Ha V vektortér, akkor $\text{Hom}(V)$ **gyűrű** az összeadásra és a szorzásra, és $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ ($A, B \in \text{Hom}(V)$, $\lambda \in T$).

FONTOS házi feladat önállóan kidolgozni a bizonyítást!