Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

3. előadás

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet,

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció:

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független,

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.
Lineárisan összefüggő:

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.
Lineárisan összefüggő: nem lineárisan független.

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.
Lineárisan összefüggő: nem lineárisan független.

v lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től,

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.
Lineárisan összefüggő: nem lineárisan független.

v lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.
Lineárisan összefüggő: nem lineárisan független.

v lineárisan függ $v_1, \dots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \dots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.
Lineárisan összefüggő: nem lineárisan független.

v lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

$v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer,

Lineáris függetlenség és generátorrendszer

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.
Lineárisan összefüggő: nem lineárisan független.

v lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

$v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer, ha V minden vektora függ tőle.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m$, v összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \dots, v_m$-től, akkor $v_1, \dots, v_m$, v összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \dots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például 0, v összefügg,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$, akkor $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$. $\square$

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \dots, v_m$ független, de $v_1, \dots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \dots, v_m$-től.

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$. Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll).

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll).
Ezért v kifejezhető,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll).
Ezért v kifejezhető, azaz függ $v_1, \ldots, v_m$-től. $\square$

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés tranzitív a következő értelemben.

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés tranzitív a következő értelemben.
Ha az $Y = \{w_1, \ldots, w_n\}$ vektorrendszer minden eleme függ az $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ vektorrendszertől,

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés tranzitív a következő értelemben.
Ha az $Y = \{w_1, \ldots, w_n\}$ vektorrendszer minden eleme függ az $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ vektorrendszertől,
és v függ Y-tól,

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés tranzitív a következő értelemben.
Ha az $Y = \{w_1, \dots, w_n\}$ vektorrendszer minden eleme függ az $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ vektorrendszertől, és v függ Y-tól, akkor v függ X-től is.

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés tranzitív a következő értelemben.
Ha az $Y = \{w_1, \ldots, w_n\}$ vektorrendszer minden eleme függ az $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ vektorrendszertől, és v függ Y-tól, akkor v függ X-től is.

Bizonyítás (3)-ra

$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$ alkalmas λ_j skalárokra.

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés tranzitív a következő értelemben.
Ha az $Y = \{w_1, \dots, w_n\}$ vektorrendszer minden eleme függ az $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ vektorrendszertől, és v függ Y-tól, akkor v függ X-től is.

Bizonyítás (3)-ra

$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ alkalmas λ_j skalárokra.
Mindegyik w_j felírható $\mu_{j1} v_1 + \dots + \mu_{jm} v_m$ alakban.

A függés és függetlenség további tulajdonságai

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés tranzitív a következő értelemben.
Ha az $Y = \{w_1, \ldots, w_n\}$ vektorrendszer minden eleme függ az $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ vektorrendszertől, és v függ Y-tól, akkor v függ X-től is.

Bizonyítás (3)-ra

$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$ alkalmas λ_j skalárokra.
Mindegyik w_j felírható $\mu_{j1} v_1 + \ldots + \mu_{jm} v_m$ alakban.
Ezeket behelyettesítve v felírását kapjuk $v_1, \ldots, v_m$-mel. $\square$

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon.

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független, így g_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től (2. Lemma).

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független, így g_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től (2. Lemma).
Ez $g_k \in F$ esetén is igaz,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független, így g_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től (2. Lemma).
Ez $g_k \in F$ esetén is igaz, így G minden eleme függ $F \setminus \{f_j\}$-től.

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független, így g_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től (2. Lemma).
Ez $g_k \in F$ esetén is igaz, így G minden eleme függ $F \setminus \{f_j\}$-től.
f_k függ G-től,

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független, így g_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től (2. Lemma).
Ez $g_k \in F$ esetén is igaz, így G minden eleme függ $F \setminus \{f_j\}$-től.
f_k függ G-től, így a függés tranzitivitása miatt f_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től.

A kicserélési tétel

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme kicserélhető a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás

Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó.
Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független, így g_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től (2. Lemma).
Ez $g_k \in F$ esetén is igaz, így G minden eleme függ $F \setminus \{f_j\}$-től.
f_k függ G-től, így a függés tranzitivitása miatt f_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től.
Ez ellentmond annak, hogy F független. $\square$

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer,

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ,

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora,

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás

Az F elemszáma m, a G elemszáma n.

$\square$

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás

Az F elemszáma m, a G elemszáma n.
A kicserélési tétel segítségével F elemeit sorban kicseréljük G egy-egy megfelelő elemével.

$\square$

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás

Az F elemszáma m, a G elemszáma n.
A kicserélési tétel segítségével F elemeit sorban kicseréljük G egy-egy megfelelő elemével. A tétel miatt végig független rendszereket kapunk

$\square$

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás

Az F elemszáma m, a G elemszáma n.
A kicserélési tétel segítségével F elemeit sorban kicseréljük G egy-egy megfelelő elemével. A tétel miatt végig független rendszereket kapunk (elemeik továbbra is függenek G-től).

$\square$

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás

Az F elemszáma m, a G elemszáma n.
A kicserélési tétel segítségével F elemeit sorban kicseréljük G egy-egy megfelelő elemével. A tétel miatt végig független rendszereket kapunk (elemeik továbbra is függenek G-től).
A kapott független rendszerek elemszáma végig m marad.

$\square$

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás

Az F elemszáma m, a G elemszáma n.
A kicserélési tétel segítségével F elemeit sorban kicseréljük G egy-egy megfelelő elemével. A tétel miatt végig független rendszereket kapunk (elemeik továbbra is függenek G-től).
A kapott független rendszerek elemszáma végig m marad.
A legvégén kapott F' része G-nek, $\square$

A kicserélési tétel következményei

Következmény

Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás

Az F elemszáma m, a G elemszáma n.
A kicserélési tétel segítségével F elemeit sorban kicseréljük G egy-egy megfelelő elemével. A tétel miatt végig független rendszereket kapunk (elemeik továbbra is függenek G-től).
A kapott független rendszerek elemszáma végig m marad.
A legvégén kapott F' része G-nek, tehát $m \leq n$. □

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0 b_1 + \ldots + 0 b_n = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.
Ha független és generátorrendszer, akkor bázis,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \dots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.
Ha független és generátorrendszer, akkor bázis, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.
Ha független és generátorrendszer, akkor bázis, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen $(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \dots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.
Ha független és generátorrendszer, akkor bázis, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, akkor innen $(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt $\lambda_j - \mu_j = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.
Ha független és generátorrendszer, akkor bázis, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen $(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt $\lambda_j - \mu_j = 0$, azaz $\lambda_j = \mu_j$ minden j-re

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés

A $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)

A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat

Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.
Ha független és generátorrendszer, akkor bázis, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen $(\lambda_1 - \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) b_n = 0$, és a függetlenség miatt $\lambda_j - \mu_j = 0$, azaz $\lambda_j = \mu_j$ minden j-re (tehát egyértelmű). $\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben,

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer,

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től,

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \dots, b_n$-től, mert $b_1, \dots, b_n$ generátorrendszer.

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő,

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő, azaz $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő, azaz $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő, azaz $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő.

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő, azaz $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő.
De $b_1, \ldots, b_n$ független,

$\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő, azaz $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő.
De $b_1, \ldots, b_n$ független, így a 2. Lemma miatt v függ $b_1, \ldots, b_n$-től. $\square$

Bázis = maximális független

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő, azaz $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő.
De $b_1, \ldots, b_n$ független, így a 2. Lemma miatt v függ $b_1, \ldots, b_n$-től. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer is. $\square$

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \dots, b_n$ már nem generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \dots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \dots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \dots, b_n$ minimális generátorrendszer.
Ha $b_1, \dots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik eleme, mondjuk b_1, függene a többiektől.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik eleme, mondjuk b_1, függene a többiektől. Ekkor a függés tranzitivitása miatt $b_2, \ldots, b_n$ generátorrendszer lenne,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás

Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \dots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \dots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \dots, b_n$ minimális generátorrendszer.
Ha $b_1, \dots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik eleme, mondjuk b_1, függene a többiektől. Ekkor a függés tranzitivitása miatt $b_2, \dots, b_n$ generátorrendszer lenne, ami ellentmond $b_1, \dots, b_n$ minimalitásának. $\square$

Bázis készítése

Következmény (Freud, 4.5.7. Tétel)

Végesen generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bázis készítése

Következmény (Freud, 4.5.7. Tétel)

Végesen generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá, amíg maximális független nem lesz.

Bázis készítése

Következmény (Freud, 4.5.7. Tétel)

Végesen generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá, amíg maximális független nem lesz.
A kicserélési tétel miatt ez véges sok lépésben véget ér.

Bázis készítése

Következmény (Freud, 4.5.7. Tétel)

Végesen generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá, amíg maximális független nem lesz.
A kicserélési tétel miatt ez véges sok lépésben véget ér.

Következmény (Freud, 4.5.6. Tétel)

Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bázis készítése

Következmény (Freud, 4.5.7. Tétel)

Végesen generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá, amíg maximális független nem lesz.
A kicserélési tétel miatt ez véges sok lépésben véget ér.

Következmény (Freud, 4.5.6. Tétel)

Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bizonyítás

Hagyjunk el belőle, míg minimális generátorrendszer nem lesz.

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér.

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$.

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű,

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt
W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű,
és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer,

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű, és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben,

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű, és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt
W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű,
és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer,
ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Ha $m = n$, akkor a kicserélési tétel miatt
$b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is,

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű, és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Ha $m = n$, akkor a kicserélési tétel miatt $b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is, és így bázis.

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt
W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű,
és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer,
ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Ha $m = n$, akkor a kicserélési tétel miatt
$b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is,
és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is,

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt
W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű,
és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer,
ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Ha $m = n$, akkor a kicserélési tétel miatt
$b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is,
és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is, de W-ben is.

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt
W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű,
és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer,
ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Ha $m = n$, akkor a kicserélési tétel miatt
$b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is,
és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is, de W-ben is.
Ezért az általa generált altér W is és V is,

Valódi altér dimenziója

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt
W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű,
és így W-ben van maximális független $b_1, \dots, b_m$ rendszer,
ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Ha $m = n$, akkor a kicserélési tétel miatt
$b_1, \dots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is,
és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is, de W-ben is.
Ezért az általa generált altér W is és V is, azaz $W = V$. $\square$