Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

2. előadás

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$,

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér,

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.

Generátorrendszer

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok,
ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben.
Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által generált altér, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: generátorok.
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy lineáris kombinációja.
A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az együtthatói.
A $v_1, \ldots, v_m$ generátorrendszer a V vektortérben,
ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.
Egy vektortérnek általában sok generátorrendszere van!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak! Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak! Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok,

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!
Például $\{1, x, x^2\}$ nem generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok, akkor generátorrendszert alkotnak a sík vektorainak vektorterében.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$
CSAK ÚGY teljesülhet,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$. Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom),

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együttható nulla,

Lineáris függetlenség

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együttható nulla, azaz $a = b = c = 0$.

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek **bázist** alkotnak V-ben,

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött,

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor,

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $1, x, x^2$ bázis,

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $1, x, x^2$ bázis, mert minden V-beli polinom egyértelműen felírható $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x + \nu \cdot x^2$ alakban

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \ldots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $1, x, x^2$ bázis, mert minden V-beli polinom egyértelműen felírható $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x + \nu \cdot x^2$ alakban ($\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$).

A bázis fogalma

Definíció

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$.
Ezek bázist alkotnak V-ben, ha V minden eleme egyértelműen felírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött.
Ebben $1, x, x^2$ bázis, mert minden V-beli polinom egyértelműen felírható $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x + \nu \cdot x^2$ alakban ($\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$).
HF: $1 + x, 1 + x^2, x^2$ is bázis V-ben.

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy **koordinátarendszert** vezetünk be

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött,

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis.

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \dots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$,

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, akkor

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$$ a v koordinátavektora ebben a bázisban.

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, akkor $[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$ a v koordinátavektora ebben a bázisban.

A koordinátázás haszna

A keletkező T^n-beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti V vektortér elemeivel,

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, akkor

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$$ a v koordinátavektora ebben a bázisban.

A koordinátázás haszna

A keletkező T^n-beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti V vektortér elemeivel, amik bonyolult dolgok (például függvények, geometriai transzformációk) is lehetnek.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$,

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.
A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.
$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.
Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.
A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.
$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.
Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis,

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.
A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.
$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.
Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.
Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.
Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.
Persze B' „ferdeszögű” koordinátarendszert ad a síkon,

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.

Persze B' „ferdeszögű” koordinátarendszert ad a síkon, hiszen $1 + i$ nem merőleges i-re.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?
$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$. A valós és képzetes rész:

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$,

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.

Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4+i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?
$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4 + i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.

A koordináták kiszámítása

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?
$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4 + i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.
Bázistranszformáció: később.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \dots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \dots, e_n)$.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \dots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \dots, e_n)$.

(2) A T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \ldots, e_n)$.

(2) A T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \ldots, e_n)$.

(2) A T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \ldots, e_n)$.

(2) A T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m \times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \ldots, e_n)$.

(2) A T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m \times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

(5) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

Szokásos bázisok

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket szokásos bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \ldots, e_n)$.

(2) A T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m \times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

(5) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(6) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ bázis.

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük.

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) $\dim_T T^n = n$.

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

(5) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

(5) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(6) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér

A bázis elemszáma

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m\times n} = mn$.

(5) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(6) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér $n+1$-dimenziós T fölött.

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

(2) Egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré.

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

(2) Egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré.

(3) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha maximális független,

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

(2) Egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré.

(3) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha maximális független, azaz bármelyik vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

(2) Egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré.

(3) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha maximális független, azaz bármelyik vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

(4) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha minimális generátorrendszer,

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

(2) Egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré.

(3) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha maximális független, azaz bármelyik vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

(4) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha minimális generátorrendszer, azaz bármelyik vektort elhagyva már nem generátorrendszer.

A bázis jellemzései

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

(2) Egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré.

(3) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha maximális független, azaz bármelyik vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

(4) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha minimális generátorrendszer, azaz bármelyik vektort elhagyva már nem generátorrendszer.

(5) Valódi (az egész tértől különböző) altér dimenziója kisebb, mint az egész tér dimenziója.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) n-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) n-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

(5) Bármely n elemű független rendszer bázis.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) n-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

(5) Bármely n elemű független rendszer bázis.

(6) Bármely n elemű generátorrendszer bázis.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) n-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

(5) Bármely n elemű független rendszer bázis.

(6) Bármely n elemű generátorrendszer bázis.

Az előző tételt legközelebb bizonyítjuk.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) n-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

(5) Bármely n elemű független rendszer bázis.

(6) Bármely n elemű generátorrendszer bázis.

Az előző tételt legközelebb bizonyítjuk.
Ennek alapján a fenti következmény igazolása Házi Feladat.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, *n*-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) *n*-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) *n*-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

(5) Bármely *n* elemű független rendszer bázis.

(6) Bármely *n* elemű generátorrendszer bázis.

Az előző tételt legközelebb bizonyítjuk.
Ennek alapján a fenti következmény igazolása Házi Feladat.

Végtelen dimenziós vektorterekkel nem foglalkozunk.

Bázis és dimenzió

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)

Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) n-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

(5) Bármely n elemű független rendszer bázis.

(6) Bármely n elemű generátorrendszer bázis.

Az előző tételt legközelebb bizonyítjuk.
Ennek alapján a fenti következmény igazolása Házi Feladat.

Végtelen dimenziós vektorterekkel nem foglalkozunk.
Ha van véges generátorrendszer, akkor a tér véges dimenziós.

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w **skaláris szorzata** $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció

A $v \in \mathbb{R}^n$ normája

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció

A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció

A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció

A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w **skaláris szorzata** $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció

A $v \in \mathbb{R}^n$ **normája** vagy **hossza** $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.
A definíció értelmes, mert $\langle v, v \rangle \geq 0$ (négyzetösszeg).

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció

A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.
A definíció értelmes, mert $\langle v, v \rangle \geq 0$ (négyzetösszeg).

Középiskolából tudjuk: a síkon $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$,

Skaláris szorzat és norma

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ekkor v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából.
Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció

A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.
A definíció értelmes, mert $\langle v, v \rangle \geq 0$ (négyzetösszeg).

Középiskolából tudjuk: a síkon $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$,
ahol φ a két vektor szöge.

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w szöge az a $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$,

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w szöge az a $0 \le \varphi \le 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$.

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w **szöge** az a $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes,

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w **szöge** az a $0 \le \varphi \le 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes, azaz $-1 \le \cos \varphi \le 1$.

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w szöge az a $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes, azaz $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

Tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$.

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w szöge az a $0 \le \varphi \le 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes, azaz $-1 \le \cos \varphi \le 1$.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

Tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $|\langle v, w \rangle| \le \|v\| \|w\|$.

Az egyik bizonyítás $n = 2$ esetén

$\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 =$

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w szöge az a $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes, azaz $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

Tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$.

Az egyik bizonyítás $n = 2$ esetén

$\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 =$

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w **szöge** az a $0 \le \varphi \le 180^\circ$, melyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes, azaz $-1 \le \cos\varphi \le 1$.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

Tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$.

Az egyik bizonyítás $n = 2$ esetén

$$\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 =$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2,$$

Vektorok szöge

Definíció

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w **szöge** az a $0 \le \varphi \le 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos\varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes, azaz $-1 \le \cos\varphi \le 1$.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

Tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $|\langle v, w \rangle| \le \|v\| \|w\|$.

Az egyik bizonyítás $n = 2$ esetén

$$\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 =$$
$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$, ami nemnegatív. $\square$

A skaláris szorzat bilineáris

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)

A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris.

A skaláris szorzat bilineáris

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)

A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris.
Azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

A skaláris szorzat bilineáris

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)

A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris.
Azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

A skaláris szorzat bilineáris

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)

A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris.
Azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

(2) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$;

A skaláris szorzat bilineáris

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)

A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris.
Azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

(2) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$;

(3) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$;

A skaláris szorzat bilineáris

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)

A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris.
Azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

(2) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$;

(3) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$;

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

A skaláris szorzat bilineáris

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)

A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris.
Azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

(2) $\langle w, u+v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$;

(3) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$;

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

Bizonyítás

Házi Feladat, közvetlen számolással.

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben,

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis,

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1,

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re,

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$,

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j\rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n\rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva
$\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \ldots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle =$

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva
$\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \ldots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle =$

Ortonormált bázis

Definíció

A $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \dots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva $\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \ldots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle = \lambda_i$. $\square$