Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

17. előadás

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre,

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó:

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre. A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus, ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re. Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre. A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus, ha műveletartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re. Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) =$ k maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

(4) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás,
1 ha x tengelyes tükrözés.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

(4) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás,
1 ha x tengelyes tükrözés.

(5) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

(4) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás,
1 ha x tengelyes tükrözés.

(5) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).

(6) $G = \mathbb{R}[x]^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus, sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus, sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe. Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus, sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a ”lényeget megőrző” leképezés.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a ”lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus, sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe. Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni, és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is. Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor. A „modellezés” a ”lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az összes szorzatot nem tudjuk áttekinteni.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus, sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a ”lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az összes szorzatot nem tudjuk áttekinteni. Az előjelképzés (homomorfizmus!) segít,

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a ”lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az összes szorzatot nem tudjuk áttekinteni. Az előjelképzés (homomorfizmus!) segít, mert ± 1-gyel könnyű számolni.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi,

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$$\varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G).$$

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva)

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.
Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.
Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$. Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$. Ekkor $\varphi(g)$ rendje osztója g rendjének.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.
Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$.
Ekkor $\varphi(g)$ rendje osztója g rendjének.
Oka: φ tartja az egész kitevőjű hatványozást:

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.
Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$.
Ekkor $\varphi(g)$ rendje osztója g rendjének.
Oka: φ tartja az egész kitevőjű hatványozást: $\varphi(g^k) = \varphi(g)^k$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ **képe** (vagyis a φ függvény értékkészlete).

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ **képe** (vagyis a φ függvény értékkészlete).

Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ **részcsoport** H-ban,

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ **képe** (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ **részcsoport** H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^{\times}$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^{+}$, $H = \mathbb{C}^{+}$, $\varphi(r) = ri$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^{\times}$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^{+}$, $H = \mathbb{C}^{+}$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

(3) G csoport, $G \leq H$, $\varphi(g) = g$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

(3) G csoport, $G \leq H$, $\varphi(g) = g$. Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi) = G$,

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban,
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

(3) G csoport, $G \leq H$, $\varphi(g) = g$. Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi) = G$, és így minden részcsoport egy alkalmas homomorfizmus képe.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \,:\, \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \; : \; \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \, : \, \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$
a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^{\times}$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^{+}$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás,
1 ha x tengelyes tükrözés.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás,
1 ha x tengelyes tükrözés. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ a forgatások.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \,:\, \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás,
1 ha x tengelyes tükrözés. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ a forgatások.

(3) $G = \mathbb{R}[x]^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^{\times}$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^{+}$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás,
1 ha x tengelyes tükrözés. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ a forgatások.

(3) $G = \mathbb{R}[x]^{+}$, $H = \mathbb{C}^{+}$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az $x^2 + 1$ többszöröseiből áll (HF).

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve **normálosztó**, jele $N \lhd G$.

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,
mert $(123)H \neq H(123)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó, mert $(123)H = \{(123), (13))\} \neq H(123)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó, mert $(123)H = \{(123), (13))\} \neq H(123) = \{(123), (23)\}$.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1} N$.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1} N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1} N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja, jele G/N.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja, jele G/N.
A ψ neve természetes homomorfizmus.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N)\cdot(g_2N)=g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké:

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N)\cdot(g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk:

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N)\cdot(g_2N)=g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1\in M_1$-et, akkor $M_1=g_1N$.
Vegyünk egy $g_2\in M_2$-t, akkor $M_2=g_2N$.
Definiáljuk: $M_1\cdot M_2=g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1=g_1'N$

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1 = g_1'N$ és $M_2 = g_2'N$,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1 = g_1'N$ és $M_2 = g_2'N$, akkor
AZT KELL ELLENŐRIZNI, hogy $g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1 = g_1'N$ és $M_2 = g_2'N$, akkor
AZT KELL ELLENŐRIZNI, hogy $g_1g_2N = g_1'g_2'N$.
Vagyis ha máshogy reprezentáljuk,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1 = g_1'N$ és $M_2 = g_2'N$, akkor
AZT KELL ELLENŐRIZNI, hogy $g_1g_2N = g_1'g_2'N$.
Vagyis ha máshogy reprezentáljuk, ugyanaz lesz a szorzat.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$$M_1 = g_1 N = g_1' N \text{ és } M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N.$$

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$$M_1 = g_1 N = g_1' N \text{ és } M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N.$$

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2'$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$$M_1 = g_1 N = g_1' N \text{ és } M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N.$$

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2'$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$$M_1 = g_1 N = g_1' N \text{ és } M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N.$$

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$$M_1 = g_1 N = g_1' N \text{ és } M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N.$$

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N = g_1Ng_2' = g_1'Ng_2' = g_1'g_2'N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.
A $\psi(g) = gN$ természetes homomorfizmus tényleg homomorfizmus,

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.
A $\psi(g) = gN$ természetes homomorfizmus tényleg homomorfizmus, melynek magja N.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\operatorname{Ker}(\varphi)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletartó

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\operatorname{Ker}(\varphi)|$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \operatorname{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\operatorname{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \operatorname{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér (és a faktorgyűrű) fogalma is.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér (és a faktorgyűrű) fogalma is.
Alkalmazás: a komplex számok precíz bevezetése

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér (és a faktorgyűrű) fogalma is.
Alkalmazás: a komplex számok precíz bevezetése
(a következő félévben, 5.2.6. Állítás).