Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

15. előadás

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait
transzformációcsoportoknak,

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek a 12. előadáson).

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek a 12. előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek a 12. előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek a 12. előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.
Egy téglalapnak, ami nem négyzet, úgyszintén (4.5.27).

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek a 12. előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.
Egy téglalapnak, ami nem négyzet, úgyszintén (4.5.27).
Egy kockának 48 szimmetriája van.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek a 12. előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.
Egy téglalapnak, ami nem négyzet, úgyszintén (4.5.27).
Egy kockának 48 szimmetriája van.

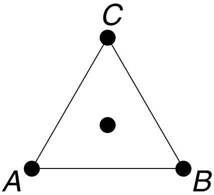
Hogyan lehet ezeket megszámolni?

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.

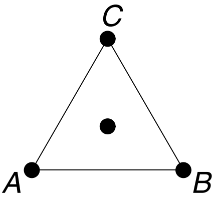
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.



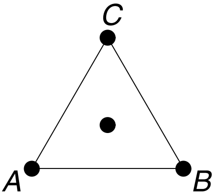
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja. A $G = D_3$ diédercsoport elemei:



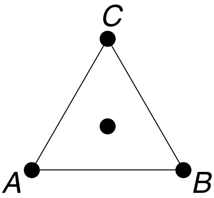
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás,



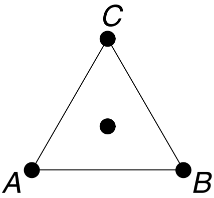
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.



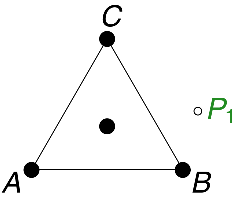
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



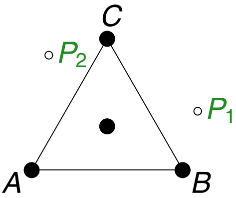
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



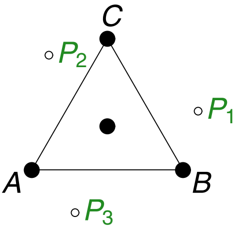
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



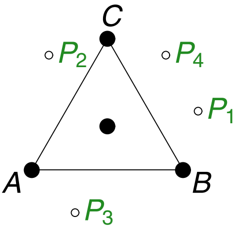
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



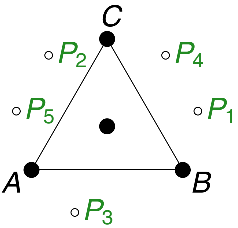
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



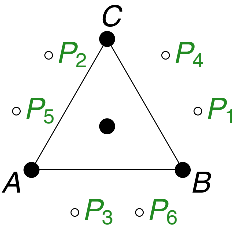
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



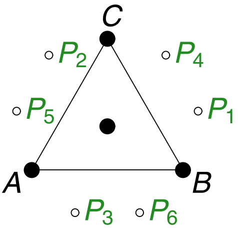
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



Példa pályára és stabilizátorra

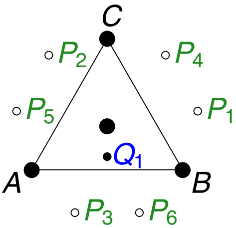
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

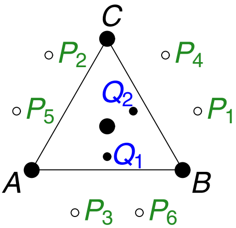
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

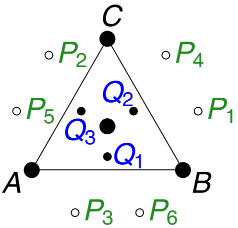
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja. A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés. Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

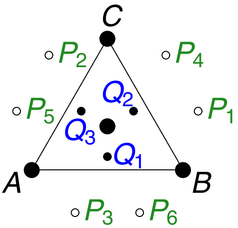
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.

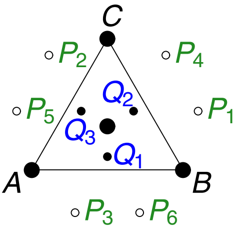


P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.

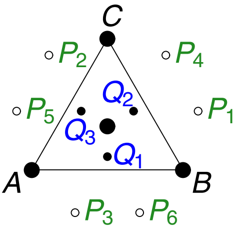


P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



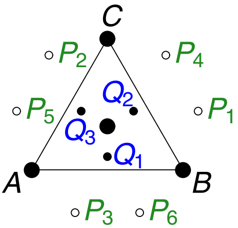
P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

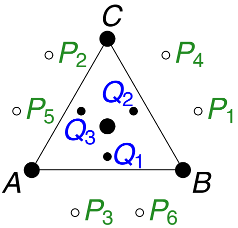
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

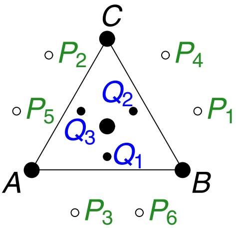
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

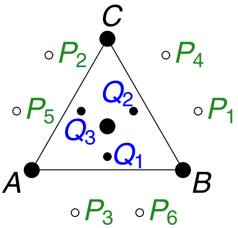
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

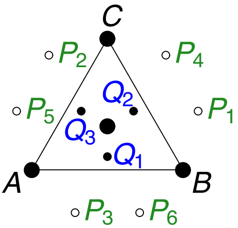
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

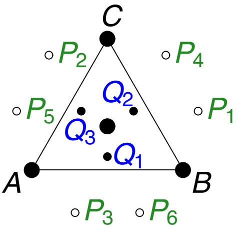
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen.

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

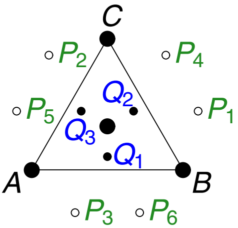
A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen.

(Pálya elemszáma)

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

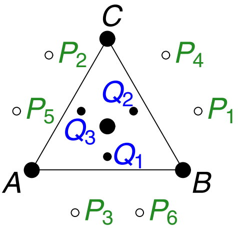
A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen.

(Pálya elemszáma) $\times$ (fixáló trafók száma) $=$

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja. A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés. Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű, mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen.

(Pálya elemszáma) $\times$ (fixáló trafók száma) $=$ csoport rendje

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x **pályájának** (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya **hosszának** hívjuk.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

4.5.8. Tétel

Egy pont pályájának a hossza a stabilizátorának az indexe.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

4.5.8. Tétel

Egy pont pályájának a hossza a stabilizátorának az indexe. Képletben: $|G(x)| = |G : G_x|$,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

4.5.8. Tétel

Egy pont pályájának a hossza a stabilizátorának az indexe. Képletben: $|G(x)| = |G : G_x|$, és így $|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x$

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \le S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x$

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük:

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \le S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$, mert
ha g közös elemük lenne,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$, mert
ha g közös elemük lenne, akkor $y_1 = g(x) = y_2$ teljesülne.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$, mert
ha g közös elemük lenne, akkor $y_1 = g(x) = y_2$ teljesülne.
α szürjektív: Ha $g \in G$ és $y = g(x) \in G(x)$, akkor $gG_x = \alpha(y)$.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak, és egyesítésük az egész X.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak, és egyesítésük az egész X.
Elnevezés: G tranzitív,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak, és egyesítésük az egész X.

Elnevezés: G tranzitív, ha az egész X egyetlen pálya.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük,

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x \, R \, x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x \, R \, y$, akkor $y \, R \, x$.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R **reflexív**, azaz $x \, R \, x$ minden x-re.

(2) R **szimmetrikus**, azaz ha $x \, R \, y$, akkor $y \, R \, x$.

(3) R **tranzitív**, azaz ha $x \, R \, y$ és $y \, R \, z$, akkor $x \, R \, z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a\ R\ x$,

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a\ R\ x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R **reflexív**, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R **szimmetrikus**, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R **tranzitív**, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a\ R\ x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják.

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők;

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a\ R\ x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják.

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők; az állítást úgy kell érteni, hogy bármely kettő

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a\ R\ x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják.

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők; az állítást úgy kell érteni, hogy bármely kettő vagy egyenlő,

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a\ R\ x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják.

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők; az állítást úgy kell érteni, hogy bármely kettő vagy egyenlő, vagy diszjunkt.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van:

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a \; R \; b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a \; R \; b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x \; R \; y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x\ R\ y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.
Ekkor R_x az $x \in X$ pályája,

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x\ R\ y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.
Ekkor R_x az $x \in X$ pályája, így a pályák partíciót alkotnak.

Példák ekvivalenciarelációra

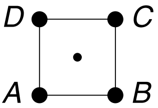
Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m-n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

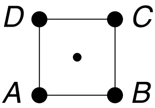
Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x\ R\ y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.
Ekkor R_x az $x \in X$ pályája, így a pályák partíciót alkotnak.

Mindhárom esetben ellenőrizni kell, hogy R ekvivalenciareláció!

A négyzet szimmetriáinak a száma

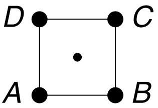


A négyzet szimmetriáinak a száma



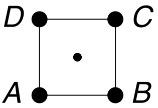
ABCD egy négyzet,

A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

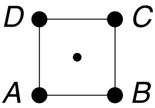
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.

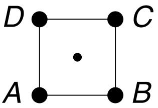
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A *G* elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A *G* tranzitív:

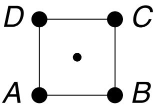
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.

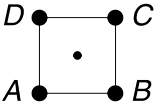
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A *G* elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A *G* tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az *A* csúcs pályája négyelemű:

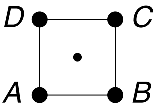
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.

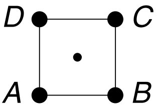
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora.

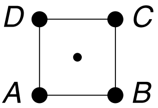
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.

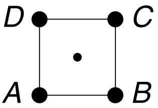
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?

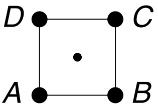
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.

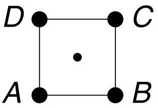
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$,

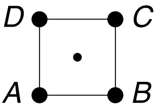
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.

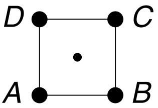
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$.

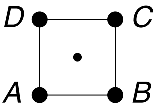
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.

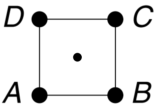
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$,

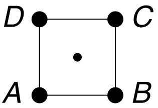
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.

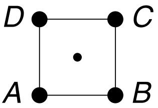
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű,

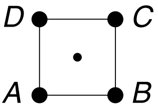
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t csak az identitás fixálja.

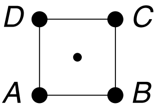
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t csak az identitás fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$.

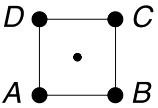
A négyzet szimmetriáinak a száma



ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t csak az identitás fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$. Tehát $|G| = 4|H|$

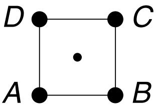
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t csak az identitás fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$. Tehát $|G| = 4|H| = 4 \cdot 2$

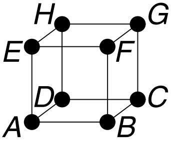
A négyzet szimmetriáinak a száma



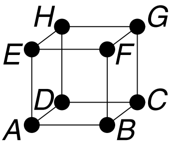
ABCD egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t csak az identitás fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$. Tehát $|G| = 4|H| = 4 \cdot 2 = 8$.

A kocka szimmetriáinak a száma

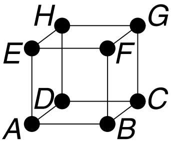


A kocka szimmetriáinak a száma



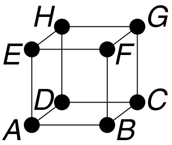
ABCDEFGH egy kocka,

A kocka szimmetriáinak a száma



$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

A kocka szimmetriáinak a száma

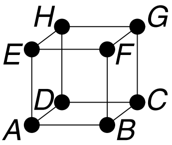


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be

A kocka szimmetriáinak a száma

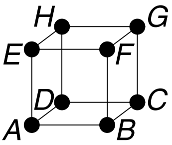


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be az *AB* felező merőleges síkjára tükrözéssel.

A kocka szimmetriáinak a száma

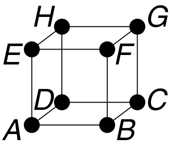


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be az *AB* felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába,

A kocka szimmetriáinak a száma

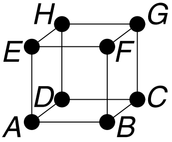


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be az *AB* felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért *G* tranzitív.

A kocka szimmetriáinak a száma

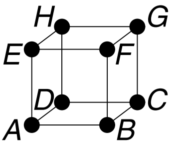


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel. Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív. Így az A csúcs pályája nyolcelemű:

A kocka szimmetriáinak a száma

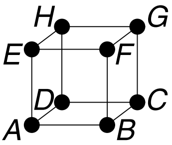


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be az *AB* felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért *G* tranzitív.
Így az *A* csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.

A kocka szimmetriáinak a száma

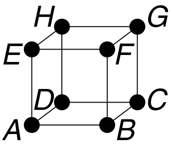


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be az *AB* felező merőleges síkjára tükrözéssel. Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért *G* tranzitív. Így az *A* csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Legyen $H = G_A \leq G$ az *A* csúcs stabilizátora.

A kocka szimmetriáinak a száma

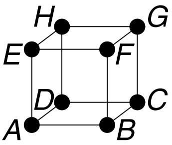


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel. Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív. Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.

A kocka szimmetriáinak a száma

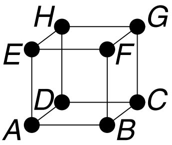


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó

A kocka szimmetriáinak a száma

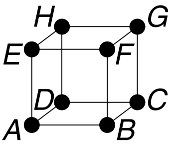


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$,

A kocka szimmetriáinak a száma

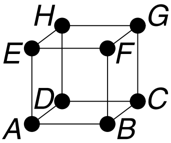


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.

A kocka szimmetriáinak a száma

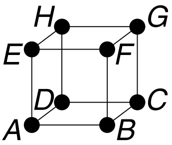


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be az *AB* felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért *G* tranzitív.
Így az *A* csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az *A* csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk *AG* körüli forgatással

A kocka szimmetriáinak a száma

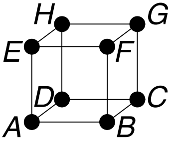


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).

A kocka szimmetriáinak a száma

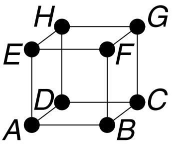


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű,

A kocka szimmetriáinak a száma

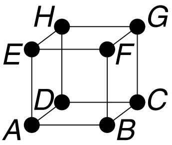


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.

A kocka szimmetriáinak a száma

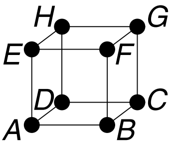


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$,

A kocka szimmetriáinak a száma

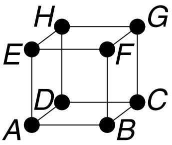


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű

A kocka szimmetriáinak a száma

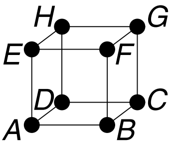


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).

A kocka szimmetriáinak a száma

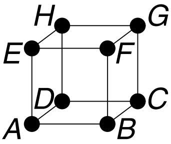


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).

A kocka szimmetriáinak a száma

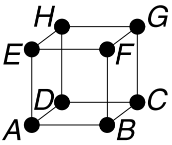


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \le G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H|$

A kocka szimmetriáinak a száma

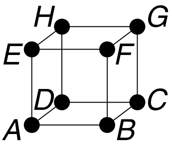


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be az *AB* felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért *G* tranzitív.
Így az *A* csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az *A* csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk *AG* körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért *H*-nál a *B* pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél *C* pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül *L*-ben *C* stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L|$

A kocka szimmetriáinak a száma

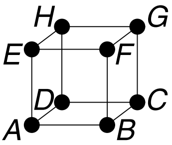


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2|L_C|$

A kocka szimmetriáinak a száma

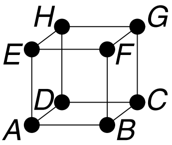


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2|L_C| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

A kocka szimmetriáinak a száma



ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120^\circ$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2|L_C| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport,

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$.

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van,

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van,

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.
Az átlag: $\dfrac{4+8\cdot 1+3\cdot 0}{12} = 1$.

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.
Az átlag: $\dfrac{4 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{12} = 1$.

Olyan leszámlálási feladatoknál hasznos, ahol bizonyos megoldásokat „nem tekintünk különbözőnek.”

A Burnside-lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.
Az átlag: $\dfrac{4 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{12} = 1$.

Olyan leszámlálási feladatoknál hasznos, ahol bizonyos megoldásokat „nem tekintünk különbözőnek.”
Ezek valamilyen szimmetriával vihetők egymásba.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt?

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport,

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!

Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!

Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.

A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!

Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.

A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.
Egyik 90°-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között (HF).

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.
Egyik 90°-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között (HF).
Így az orbitok száma $(36 + 4 + 2 \cdot 0)/4 = 10$.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!

Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.

A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.

Egyik 90°-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között (HF).

Így az orbitok száma $(36 + 4 + 2 \cdot 0)/4 = 10$.

Ha tükrözést is megengedünk, akkor a D_4 diédercsoportot kell használni.

A Burnside-lemma alkalmazása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!

Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.

A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.

Egyik 90°-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között (HF).

Így az orbitok száma $(36 + 4 + 2 \cdot 0)/4 = 10$.

Ha tükrözést is megengedünk, akkor a D_4 diédercsoportot kell használni. Az eredmény $(36 + 4 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 6)/8 = 8$.