Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

11. előadás

Háromszög-szimmetria

Rubin

Zafir

aluminium-oxid: Al_2O_3

Kalcit

kalcium-karbonát: $CaCO_3$

Hematit

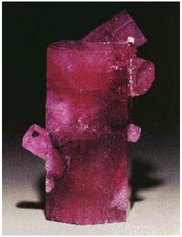
vasoxid: Fe_2O_3

Ametiszt

Kvarc

szilicium-dioxid: SiO_2

Hatszög-szimmetria



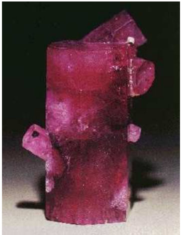
Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát):



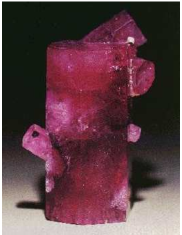
Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát): $Be_3Al_2(SiO_3)_6$



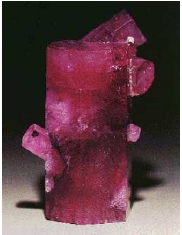
Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát): $Be_3Al_2(SiO_3)_6$
Egy szimmetriatengely körüli 60°-os elforgatás.



Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Kocka–oktaéder-szimmetria

Galenit
ólom-szulfid: PbS

Gyémánt
szén: C

Fluorit
kalcium-fluorid: CaF_2

Kocka–oktaéder-szimmetria

Összesen 48 szimmetria.

Galenit
ólom-szulfid: PbS

Gyémánt
szén: C

Fluorit
kalcium-fluorid: CaF_2

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája,

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg,

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

Kiss-jegyzet, C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

Kiss-jegyzet, C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

Kiss-jegyzet, C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei
(lendület,

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

Kiss-jegyzet, C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei
(lendület, energia,

A bolygómozgás szimmetriája

Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

Kiss-jegyzet, C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei (lendület, energia, perdület) között.

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe,

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési

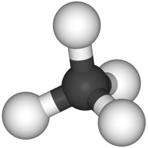
Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

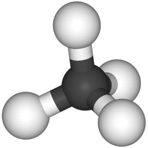
Metánmolekula: CH_4,



Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

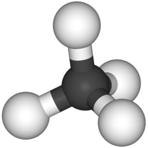
Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).



Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

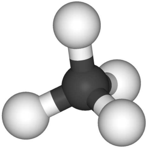


Zeeman-hatás:

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

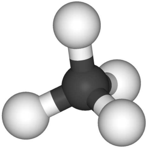


Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat
két vagy három komponensre bontja szét.

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

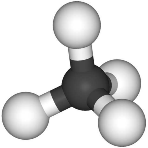


Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat
két vagy három komponensre bontja szét.
Oka: mágneses térben megszűnnek egyes szimmetriák.

Színképvonalak felhasadása

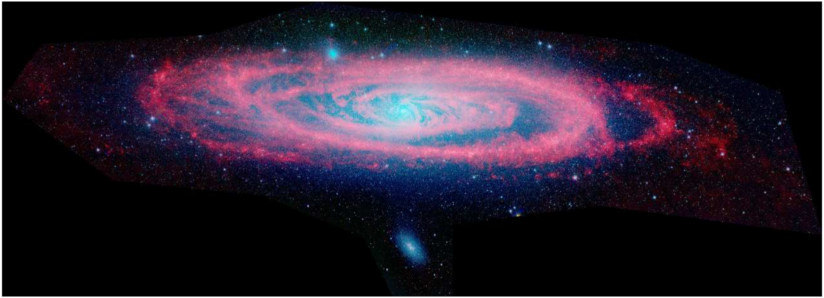
A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

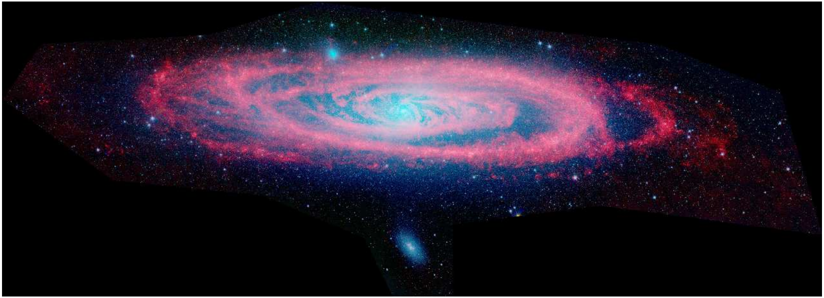


Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat két vagy három komponensre bontja szét.
Oka: mágneses térben megszűnnek egyes szimmetriák.
Matematikai apparátus: a szimmetriák csoportján alapul.

Lorentz-transzformációk



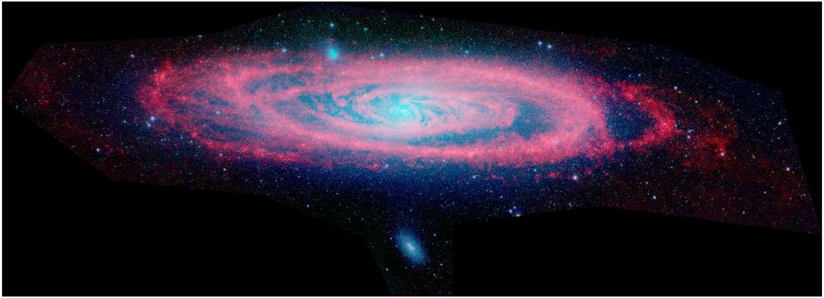
Lorentz-transzformációk



A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Lorentz-transzformációk

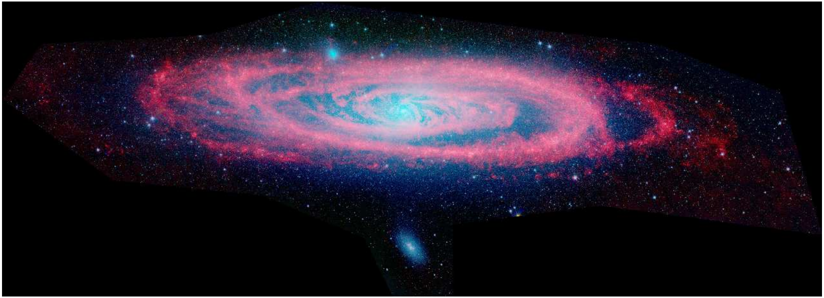
A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit
a Lorentz-transzformációk adják meg.



A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Lorentz-transzformációk

A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit a Lorentz-transzformációk adják meg.

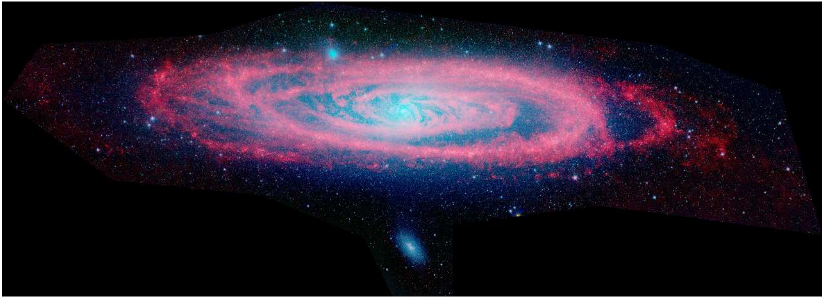


Lásd Kiss-jegyzet, 4.1. és C.6. szakasz.

A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Lorentz-transzformációk

A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit a Lorentz-transzformációk adják meg.



Lásd Kiss-jegyzet, 4.1. és C.6. szakasz.
A C.7. szakaszban az Androméda-ködbe is elutazunk.
A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének
sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének
sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható
(ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek (csak ki lehessen keverni belőlük minden sorrendet).

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek (csak ki lehessen keverni belőlük minden sorrendet).
Bizonyítás: ugyanaz az apparátus, mint a metánmolekulánál.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Projektív geometriában az egyenestartó transzformációk.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Projektív geometriában az egyenestartó transzformációk.
Ilyen például a vetítés

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Projektív geometriában az egyenestartó transzformációk.
Ilyen például a vetítés (fényképzés, panorámaképek illesztése).

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím). Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható. Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;
- csoportkarakterek véges kommutatív csoportokra.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;
- csoportkarakterek véges kommutatív csoportokra.

Szalay Mihály: Számelmélet (középiskolai tagozatos tankönyv).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).

A csoportelmélet rendkívül mély!

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).

A csoportelmélet rendkívül mély!

A véges egyszerű csoportok osztályozásának bizonyítása több, mint tízezer oldal!

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).

A csoportelmélet rendkívül mély!

A véges egyszerű csoportok osztályozásának bizonyítása több, mint tízezer oldal! Rengeteg alkalmazása van például a kombinatorikában, az algoritmuselméletben.