Algebra2, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

10. előadás

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x)+4$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \qquad 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x)+4 = x^2-4x+4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nincs sajátvektorokból álló bázis,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el. Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nincs sajátvektorokból álló bázis, M nem diagonalizálható.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS$$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális,

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval):

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:

$$M^k = \begin{bmatrix} 2^k - 2k2^{k-1} & -4k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + 2k2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó **Jordan-blokk**:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, közvetlenül alatta ferdén 1,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, közvetlenül alatta ferdén 1, másutt 0.

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, közvetlenül alatta ferdén 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk az előző félévben

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, közvetlenül alatta ferdén 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk az előző félévben

N^j a főátló alatti j-edik sorban ferdén 1,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

A főátló végig λ, közvetlenül alatta ferdén 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk az előző félévben

N^j a főátló alatti j-edik sorban ferdén 1, másutt 0.

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, közvetlenül alatta ferdén 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk az előző félévben

N^j a főátló alatti j-edik sorban ferdén 1, másutt 0.
Speciálisan $N^j = 0$, ha $j \geq m$.

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú,

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek,

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges,
a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű:

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges,
a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű:
csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott

az,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Bizonyítás: a következő félévben, de nem minden szakirányon.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Bizonyítás: a következő félévben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Bizonyítás: a következő félévben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat. Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Bizonyítás: a következő félévben, de nem minden szakirányon. Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma. A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Bizonyítás: a következő félévben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist.
Az eljárásból a minimálpolinomot is megkapjuk.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges,
a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű:
csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Bizonyítás: a következő félévben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist.
Az eljárásból a minimálpolinomot is megkapjuk.
Haszna: van képlet a Jordan-alak hatványozására.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok,

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98} =$$

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k =$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E.$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető,

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k =$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1} N$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$.
Használjuk föl N^j ismert szerkezetét. $\square$

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük:

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az.

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n\times n}$.

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal,

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött,

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$,

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban,

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli ortogonális mátrixszal,

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n\times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n\times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli ortogonális mátrixszal, ha M szimmetrikus.

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli ortogonális mátrixszal, ha M szimmetrikus.

$\mathbb{C}$ fölött is értelmezhető a skaláris szorzat

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n\times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n\times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli ortogonális mátrixszal, ha M szimmetrikus.

$\mathbb{C}$ fölött is értelmezhető a skaláris szorzat és az ortonormált bázis fogalma.

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli ortogonális mátrixszal, ha M szimmetrikus.

$\mathbb{C}$ fölött is értelmezhető a skaláris szorzat és az ortonormált bázis fogalma. Az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölötti ortonormált bázisban,

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli ortogonális mátrixszal, ha M szimmetrikus.

$\mathbb{C}$ fölött is értelmezhető a skaláris szorzat és az ortonormált bázis fogalma. Az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölötti ortonormált bázisban, ha $MM^T = M^T M$.

Diagonalizálható mátrixok

Legyen T test és $M \in T^{n\times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n\times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M ortonormált bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli ortogonális mátrixszal, ha M szimmetrikus.

$\mathbb{C}$ fölött is értelmezhető a skaláris szorzat és az ortonormált bázis fogalma. Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölötti ortonormált bázisban, ha $MM^T = M^T M$.
Lásd Freud, 8.5. szakasz.

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló,

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció,

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra.

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N **hasonló**, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja,

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja és a sajátértékei is

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja és a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja és a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Az első állítás a bázistranszformáció képletéből adódik.

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja és a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Az első állítás a bázistranszformáció képletéből adódik.
A második igaz, mert ha $M = [A]$,

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja és a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Az első állítás a bázistranszformáció képletéből adódik.
A második igaz, mert ha $M = [A]$, akkor $k_M = k_A$

Hasonlóság

Definíció

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja és a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Az első állítás a bázistranszformáció képletéből adódik.
A második igaz, mert ha $M = [A]$, akkor $k_M = k_A$ és $m_M = m_A$.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei).

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$, ahol g és h relatív prím polinomok.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$, ahol g és h relatív prím polinomok. Ekkor $V = \mathrm{Ker}\, g(A) \oplus \mathrm{Ker}\, h(A)$.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$, ahol g és h relatív prím polinomok. Ekkor $V = \operatorname{Ker} g(A) \oplus \operatorname{Ker} h(A)$.

Ezzel a lineáris algebra eféléví részét elvégeztük.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$, ahol g és h relatív prím polinomok. Ekkor $V = \operatorname{Ker} g(A) \oplus \operatorname{Ker} h(A)$.

Ezzel a lineáris algebra efélévi részét elvégeztük.
Az anyagot lefedi a Freud-könyv első nyolc fejezete,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$, ahol g és h relatív prím polinomok. Ekkor $V = \mathrm{Ker}\, g(A) \oplus \mathrm{Ker}\, h(A)$.

Ezzel a lineáris algebra efélévi részét elvégeztük.
Az anyagot lefedi a Freud-könyv első nyolc fejezete,
de az utolsó két fejezetet csak éppen hogy érintettük.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)

Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$, ahol g és h relatív prím polinomok. Ekkor $V = \mathrm{Ker}\, g(A) \oplus \mathrm{Ker}\, h(A)$.

Ezzel a lineáris algebra efélévi részét elvégeztük.
Az anyagot lefedi a Freud-könyv első nyolc fejezete, de az utolsó két fejezetet csak éppen hogy érintettük.
Haladóknak kiegészítés a Kiss-jegyzet 7.6. szakasza.