

1. Behelyettesítés polinomba

Mátrix behelyettesítése polinomba.

Definíció

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \in T[x]$.

Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix, akkor legyen

$$f(M) = a_0E + a_1M + \dots + a_mM^m \in T^{n \times n}.$$

Ha V vektortér T fölött, $A \in \text{Hom}(V)$ és $I \in \text{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen

$$f(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_mA^m \in \text{Hom}(V).$$

Behelyettesítéskor az f polinom konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Példa

$$f(x) = x - 2, N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A - 2I = 0$.

($[A] = N$ tetszőleges bázisban.)

Példák behelyettesítésére.

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ekkor } f(M) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diagonális mátrix behelyettesítése

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies f(D) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba.

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n \times n}$, akkor $(f + g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.

$$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx.$$

$$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM.$$

$$f(M) = aM^2 + bM + cE \text{ és } g(M) = uM^2 + vM. \text{ Így } f(M)g(M) =$$

$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM.$
 Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
 $aM^2vM + bMuM^2 = (av + bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
 Az asszociativitás miatt! HF: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$
 (itt $M^0 = E$). Vagyis M hatványai felcserélhetők.

2. A minimálpolinom

Polinom gyöke.

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f -nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!

Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g -t maradékosan $x - 2$ -vel:

$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen

$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$. Azaz $c = 0$, tehát $x - 2 \mid g$.

A minimálpolinom létezése.

Tétel (vö. Freud, 6.3.2 és 6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix *minimálpolinomja*. Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is. Ekkor a minimálpolinom jele m_A .

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $x - 2$.

A minimálpolinom kiszámítása.

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a *legalacsonyabb fokú* olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek. A minimálpolinom a karakterisztikus polinom osztói között a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek a mátrix gyöke.

A kétdimenziós eset.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1 , $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $k_M = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis *elsőfokú* minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

Következmény

Ha egy kétszer kettes mátrix nem cE alakú, akkor minimálpolinomja ugyanaz, mint a karakterisztikus polinomja.

Diagonális mátrix minimálpolinomja.

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a főátló elemei, de *mindegyik csak egyszer felsorolva*. Ekkor $m_D = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ minimálpolinomja } m(x) = (x - 1)(x - 2).$$

$m(D) = 0$ (HF), de $(x - 1)(x - 2) \mid m_D(x)$, mert 1, 2 sajátérték.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ minimálpolinomja } (x - 2)^2 \text{ (van kétszeres gyöke!).}$$

3. Bizonyítások

Létezik a minimálpolinom.

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor *van* olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a *legkisebb* fokú ilyen, akkor $(\forall f). f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \dots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan a_0, \dots, a_{n^2} , nem mind nulla, hogy $a_0E + a_1M + \dots + a_{n^2}M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n^2}x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\text{gr}(r) < \text{gr}(m)$ vagy $r = 0$.

Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$. Azaz

$f(M) = 0 \iff r(M) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom,

melynek M gyöke. Ezért $r(M) = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. \square

Minden sajátérték gyök.

Állítás

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$. Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.

$$M^2v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v.$$

$$M^3v = M(M^2v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v.$$

És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.

Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, akkor

$$f(M)v = a_0Ev + a_1Mv + \dots + a_mM^mv =$$

$$= a_0v + a_1\lambda v + \dots + a_m\lambda^mv = f(\lambda)v.$$

Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$, és mivel $v \neq 0$, ezért $f(\lambda) = 0$. \square

Minden gyök sajátérték.

Állítás

A karakterisztikus polinom osztója a minimálpolinomnak. Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték. A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$. Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$. Mivel $n = \text{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\text{gr}(m_M) \leq n$. Mivel k_M gyökei az M sajátértékei, ezért m_M minden gyöke sajátértéke M -nek. \square

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk. A bizonyításához újabb eszközök kellenek. Lásd Kiss: Bevezetés az algebra, 7.7.6. Tétel.