

1. Sajátérték és sajátvektor

Leképezés diagonális mátrixa.

Kérdés

Mely bázisban lesz egy transzformáció mátrixa *diagonális*?

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis.

Ha $[A]_{\mathbf{b}, \mathbf{b}}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll,

akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció

Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor

λ *sajátértéke*, v pedig egy λ -hoz tartozó *sajátvektora* A -nak.

A λ sajátértékhez tartozó *sajátaltér* $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis

a λ -hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. **HF:** ez altér.

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

A diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis. □

A sajátértékek meghatározása.

$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v$.

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$, ezek A sajátértékei.

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A mátrix *karakterisztikus polinomja*.

A karakterisztikus polinom.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

Legyen V egy n -dimenziós vektortér, $A \in \text{Hom}(V)$, $k_A = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

(1) A k_A tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.

(2) A k_A karakterisztikus polinom gyökei az A sajátértékei.

- (3) A **sajátértékek összege**, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az A mátrixának *nyoma*, vagyis az $[A]$ főátlójában álló elemek összege.
Ez a k_A polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$ -szerese.
- (4) A **sajátértékek szorzata** $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(A)$. Ez a k_A polinom konstans tagja.

Figyelni kell a gyökök *multiplicitására*! Lehetőleg \mathbb{C} (vagy algebrailag zárt test) fölött dolgozzunk!

Példák karakterisztikus polinomra.

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás. Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

$$= x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz *komplex* sajátértékek! Az A mátrixának *nyoma* $2 \cos \alpha$, determinánsa 1.

$$\text{Legyen } A \text{ mátrixa } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Ekkor } k_A(x) = \det \begin{bmatrix} 2 - x & 1 \\ 0 & 2 - x \end{bmatrix} =$$

$$= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

2 az egyetlen sajátérték. Nyom = $2 + 2$, determináns = $2 \cdot 2$.

A sajátvektorok meghatározása.

Legyen A a *tükrözés az $y = x$ egyenesre*. Mik A sajátvektorai?

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1 -hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

Sajátvektorokból álló bázis: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ebben $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Diagonalizálás

Diagonalizálás bázistranszformációval.

Ha leképezés helyett mátrix van megadva:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$SM S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M diagonalizáltja (főátlóban sajátértékek).

Vagyis M -et bázistranszformációval diagonális alakra hoztuk.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele.

Tétel

Ha egy $n \times n$ -es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix *diagonalizálható*.

Két példa a megfordítás kapcsán

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ és } N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Ekkor } k_M(x) = k_N(x) = (x - 2)^2.$$

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).

Az M viszont **nem diagonalizálható**. Ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff y = 0.$$

Az $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ alakú vektorok között nincs két független (azaz bázis).

A sajátvektorok függetlenek.

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok *lineárisan függetlenek*.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).

Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0$. Az A -t alkalmazva

$$0 = \mu_1 A(v_1) + \dots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_k \lambda_k v_k.$$

A zöld egyenlet λ_1 -szeresét kivonva

$$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0. \text{ Az indukciós feltevés}$$

miatt v_2, \dots, v_n független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.

Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \dots = \mu_k = 0$.

Mivel $v_1 \neq 0$, a zöld egyenletből $\mu_1 = 0$. □

3. Véges Markov-folyamatok

Egyszerű alkalmazás.

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n -edik évben a_n -ed rész autós, b_n -ed rész tömegközlekedő.

Ekkor $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,1b_n$, és $b_{n+1} = 0,05a_n + 0,9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0,4$ és $b_0 = 0,6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$. Vagyis a feladat az M mátrix hatványainak a kiszámítása. Ehhez *diagonalizáljuk* az M mátrixot.

A mátrix hatványainak kiszámítása.

$$M = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1,85x + 0,85,$$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix} = D.$$

$$\text{Ezért } M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}.$$

$$\text{De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: } D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{bmatrix}.$$

$$M^n = SD^n S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 0,85^n & 2 - 2 \cdot 0,85^n \\ 1 - 0,85^n & 1 + 2 \cdot 0,85^n \end{bmatrix}.$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}, \text{ így } v_n = M^n v_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 - 0,8 \cdot 0,85^n \\ 1 + 0,8 \cdot 0,85^n \end{bmatrix}.$$

Az eredmény elemzése.

Az n -edik évben $a_n = 66,6 - 26,7 \cdot 0,85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33,3 + 26,7 \cdot 0,85^n$ százalék tömegközlekedik.

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $0,85^n \rightarrow 0$ (mert $|0,85| < 1$), vagyis
hosszú távon **66,666% autózik** és **33,333% tömegközlekedik**.

HF: Ez *nem függ a kiinduló eloszlástól* (a 60%-tól)!!

Év	autózó	tömegközlekedő
0	40%	60%
1	44%	56%
2	47%	53%
5	55%	45%
10	61%	39%
20	66%	34%

Az eredeti föltevések fiktívek!