1. Vektorrendszer és leképezés rangja

Vektorrendszer rangja.

Definíció
Egy vektorrendszer *rangja* az általa generált altér dimenziója.

Tétel
Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás
Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő. A múltkori 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től. A függés tranzitivitása miatt $\langle X \rangle$ minden eleme függ F-től. Vagyis F bázis az $\langle X \rangle$-ben, és így F elemszáma az X rangja.

Azaz a rang a maximális függetlenek elemszáma. Jele: $r(X)$.

Lineáris leképezés rangja.

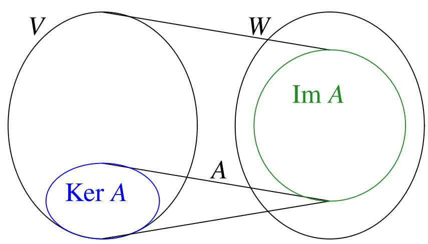
Definíció
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *rangja* a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Tétel (Freud, 5.7.11. Feladat)
Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Bizonyítás
Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben.
HF: Ekkor $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\, A$-ban.
Azaz $r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big)$.
Az $[A]_{\mathbf{b},\mathbf{d}}$ oszlopvektorai $[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}$.
De $r\big(A(b_1), \ldots, A(b_n)\big) = r\big([A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}}\big) = r([A])$,
mert $w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ izomorfizmus, így megőrzi a rangot (HF).

Összeg rangja.

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

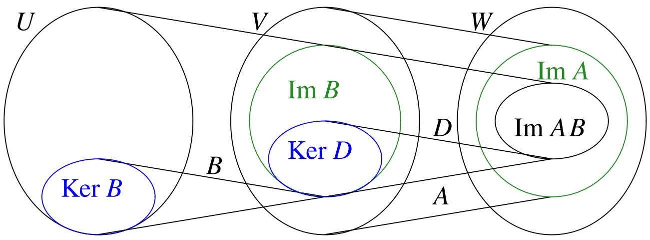
$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

Állítás
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.

Bizonyítás
$r(A+B) = \dim \mathrm{Im}(A+B)$. HF: $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \le \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,
mert $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$ (gyakorlaton).

Szorzat rangja.

Tétel (Freud, 5.7.12. Feladat)
$r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás
Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \le \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\, D + \dim \mathrm{Ker}\, D = \dim \mathrm{Im}\, B$.
Így $r(AB) = r(D) = \dim \mathrm{Im}\, D \le \dim \mathrm{Im}\, B = r(B)$. $\square$

2. Diádfelbontás

A diád fogalma.

Definíció
Diád: egy oszlop- és egy sorvektor szorzata.

$$uv = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

Állítás
A diád rangja 1, ha u és v egyike sem nulla (különben nulla). Megfordítva, minden (legfeljebb) 1 rangú mátrix diád.

Bizonyítás
Az 1-rangú mátrixok azok, melyekben van egy nem nulla oszlop, és a többi oszlop ennek skalárszorosa. $\square$

Felbontás diádok összegére.

Tétel
Minden M mátrix felbontható $r(M)$ darab diád összegére, de kevesebb diád összegére nem.

Bizonyítás
Ha $M = D_1 + \ldots + D_k$, ahol minden j-re D_j diád, akkor
$r(M) = r(D_1 + \ldots + D_k) \le r(D_1) + \ldots + r(D_k) \le k$.
Vagyis az M rangjánál kevesebb számú diád nem elég.
A megfordítás ötlete: Legyen $M = ((m_{ij}))$, ahol $m_{11} \ne 0$, u az M első oszlopa és $v = \begin{bmatrix} 1 & m_{12}/m_{11} & \ldots & m_{1n}/m_{11} \end{bmatrix}$. Ekkor $M - uv$ első sora és oszlopa végig nulla. Az eljárást további nem nulla elemekkel folytatjuk, amelyek mindig *új sorban* és *új oszlopban* vannak. Be lehet bizonyítani, hogy az eljárás $r(M)$ lépésben véget ér.

A transzponált rangja.

Tétel
A M mátrixnak és a transzponáltjának ugyanaz a rangja. Speciálisan M sorrangja és oszloprangja megegyezik.

(Második) bizonyítás
Jelölje M^T az M transzponáltját: $M = ((m_{ij})) \implies M^T = ((m_{ji}))$.
HF: $(M+N)^T = M^T + N^T$ és $(MN)^T = N^T M^T$.
Diád transzponáltja is diád, mert $(uv)^T = v^T u^T$.
Ha $M = D_1 + \ldots + D_r$, ahol a D_j diád és $r = r(M)$,
akkor $M^T = D_1^T + \ldots + D_r^T$, és így $r(M) = r \ge r(M^T)$.
Ezt M helyett M^T-ra alkalmazva $r(M^T) \ge r\big((M^T)^T\big) = r(M)$. $\square$

Az első bizonyítás még az előző félévben szerepelt,
Gauss-elimináció felhasználásával.

Determinánsrang.

Definíció
Az M mátrix *determinánsragja* r, ha

(1) kiválasztható r sor és r oszlop úgy, hogy a metszéspontjaikban álló $r \times r$-es mátrix determinánsa nem nulla;

(2) de $r+1$ sor és oszlop már nem választható ki így.

Tétel (Freud, 3.4.2. Tétel)
Minden mátrix determinánsragja egyenlő az oszloprangjával.

Bizonyítás: nincs.
Mivel M-nek és M transzponáltjának a determinánsrangja a transzponált determinánsról szóló tétel miatt ugyanaz, ezért egy harmadik bizonyítást kapunk arra, hogy a sor- és oszloprang egyenlő.

3. Lineáris egyenletrendszer és rang

A kibővített mátrix.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti $Mx = b$ egyenletrendszer mátrixa.

$$[M, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$ a *kibővített* mátrix.

A megoldhatóság jellemzése.

Tétel (Freud, 3.4.3. Tétel)
Legyen $M \in T^{n \times m}$. Az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a kibővített mátrix rangja megegyezik az egyenletrendszer mátrixának rangjával: $r([M, b]) = r(M)$. Ilyenkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $r(M) = m$ (vagyis ez a rang egyenlő az ismeretlenek számával).

Bizonyításvázlat
Akkor és csak akkor van megoldás, ha b benne van az M oszlopai által generált altérben, vagyis ha M és $[M, b]$ oszlopai ugyanazt az alteret generálják. Akkor és csak akkor egyértelmű a megoldás, ha M oszlopai lineárisan függetlenek is.