1. Képtér és magtér

Magtér és injektivitás.

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Az A *magtere* $\mathrm{Ker}(A) = \{v \in V \ : \ A(v) = 0_W\}$.

$\mathrm{Ker}(A)$ altér V-ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás
$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \mathrm{Ker}(A)$. Legyen $u, v \in \mathrm{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért $A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \mathrm{Ker}(A)$.
$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \mathrm{Ker}(A)$. Tehát $\mathrm{Ker}(A)$ altér.
Ha $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor
$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.
Ha A injektív, akkor $\mathrm{Ker}(A) = 0$, mert ha $v \in \mathrm{Ker}(A)$, akkor $A(v) = 0 = A(0)$, így az injektivitás miatt $v = 0$.

Képtér és szürjektivitás.

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Az A *képtere* $\mathrm{Im}(A) = \{A(v) \in W \ : \ v \in V\}$.
Azaz $\mathrm{Im}(A)$ az A *értékkészlete*, azon $w \in W$ vektorokból áll,
melyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\mathrm{Im}(A)$ altér W-ben, és pontosan akkor W, ha A szürjektív.

Bizonyítás
$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \mathrm{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \mathrm{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$-re. Ezért $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \mathrm{Im}(A)$.
$A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w \implies \lambda w \in \mathrm{Im}(A)$. Tehát $\mathrm{Im}(A)$ altér.
Szürjektív akkor és csak akkor, ha értékkészlete az egész W.

A dimenziótétel.

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)
$\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim V$ ($A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\dim(V)$ véges).

Bizonyítás
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis $\mathrm{Ker}(A)$-ban. Egészítsük ezt ki a $d_1, \ldots, d_m$ vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$. Elég tehát belátni, hogy $A(d_1), \ldots A(d_m)$ bázis $\mathrm{Im}(A)$-ban.
Generátorrendszer: Ha $w \in \mathrm{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$-re.
Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \ldots + \mu_m d_m$.
Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \ldots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.
Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \ldots + \mu_m A(d_m) = 0$.
Ekkor $v = \mu_1 d_1 + \ldots + \mu_m d_m \in \mathrm{Ker}(A)$, és így felírható $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban is. Bázisban v felírása *egyértelmű*, ezért $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. $\square$

A dimenziótétel következménye.

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)
Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \mathrm{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás
$\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim V$. Ha A szürjektív, akkor $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$. Ezért A injektív is. Ha A injektív, akkor $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim(V)$. Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is.

Végtelen dimenzióban *nem igaz!* Példa:
$\mathbb{R}[x]$-ben $A\big(f(x)\big) = xf(x)$. Injektív, de nem szürjektív.
$\mathbb{R}[x]$-ben $A\big(f(x)\big) = f'(x)$ (derivált). Szürjektív, de nem injektív.

2. Az invertálhatóság jellemzései

Leképezés determinánsa.

Definíció
Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A *determinánsa* $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, de melyik bázisban? *MINDEGY!*

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det\big(S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S\big) = \det\big([A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}\big)$,
hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprokai.

A $\det(A)$ jelentése: hányszorosára növeli A a térfogatot.
Pontos tárgyalás előjeles mértékek segítségével: lásd Freud-jegyzet, 9.8. szakasz.
$\det(A)$ pozitív, ha A *irányítástartó*, negatív, ha A *irányításváltó*.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése.

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)
Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \operatorname{Hom}(V)$, akkor *ekvivalens*:

(1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).

(2) A-nak van balinverze.

(3) A-nak van jobbinverze.

(4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).

(5) A nem jobb oldali nullosztó (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).

(6) A injektív (azaz $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$).

(7) A szürjektív (azaz $\operatorname{Im}(A) = V$).

(8) A bijektív.

(9) $\det(A) \neq 0$.

Itt C és D is $\operatorname{Hom}(V)$-ben van.

(1) $\implies$ (2), (3) triviális, (6), (7) $\implies$ (8) volt már.

Az invertálhatóság jellemzései: megjegyzések.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) $\iff$ (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (ezt beláttuk az előző félévben). Ezért (8) $\iff$ (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$. Ez ugyanaz az ötlet, mint hogy test nullosztómentes. Ezért (2) $\implies$ (4). Hasonlóan (3) $\implies$ (5) (HF).

Tehát elég belátni, hogy (4) $\implies$ (6) és (5) $\implies$ (7), mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó.

Állítás
Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \operatorname{Hom}(V)$ nem injektív,
akkor létezik $0 \neq C \in \operatorname{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $\operatorname{Ker}(A)$ nem csak a nullvektorból áll. Legyen $0 \neq v \in \operatorname{Ker}(A)$ és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \operatorname{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j-re. Tehát $C \neq 0$. Ugyanakkor $AC(b_j) = A(v) = 0$ minden j-re, mert $v \in \operatorname{Ker}(A)$. Azaz AC egy bázis minden elemét nullába viszi, így minden vektort nullába visz, tehát $AC = 0$. $\square$

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó.

Állítás
Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \mathrm{Hom}(V)$ nem szürjektív,
akkor létezik $0 \neq D \in \mathrm{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $\mathrm{Im}(A)$ nem az egész V. Legyen $b_1, \ldots, b_m$ bázis $\mathrm{Im}(A)$-ban, és egészítsük ezt ki a $d_1, \ldots, d_k$ vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \mathrm{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i-re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j-re. Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \mathrm{Im}(A)$-ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m$ alakban,
és $D(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \ldots + \lambda_m D(b_m) = 0$. Így $DA(w) = 0$ minden $w \in V$-re, mert $v = A(w) \in \mathrm{Im}(A)$. □

Mátrix invertálhatóságának jellemzései.

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)
Az $M \in T^n \times n$-es mátrixra *ekvivalens*:

(1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).

(2) M-nak van balinverze.

(3) M-nak van jobbinverze.

(4) M nem bal oldali nullosztó (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).

(5) M nem jobb oldali nullosztó (azaz $DM = 0 \implies D = 0$).

(9) $\det(M) \neq 0$.

Itt C és D is $T^{n \times n}$-beli mátrix.

Bizonyítás
A mátrixok és a lineáris transzformációk közötti *kölcsönösen egyértelmű, művelettartó* megfeleltetésből következik.

Bal- és jobbinverz.

Tétel
Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás
A feltétel szerint A-nak van jobbinverze (a B), ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$. Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$. Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. □

Fontos megjegyzés
Innen négyzetes mátrixokra $MN = E \implies NM = E$. Ezt tavaly előjeles aldeterminánsokkal bizonyítottuk. A mostani *számolásmentes* bizonyítás mélyén a *dimenziótétel* van. Ez az absztrakt módszerek erejét demonstrálja.