1. Lineáris leképezések mátrixa

Az előírhatósági tétel.

Tétel (Freud, 5.3.1. Tétel)
Legyenek V és W vektorterek a T test fölött,
$b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, és $c_1, \ldots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok.
Ekkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés van, melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség
Ha A megfelel a feltételeknek, akkor
$A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \ldots + A(\lambda_n b_n)$,
mert A összegtartó, és ez $\lambda_1 A(b_1) + \ldots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$, mert A skalárszorostartó. Azaz A értékét V minden elemén ki tudjuk számítani, és így *csak egy* megfelelő A leképezés létezhet. Az egyértelműséget tehát beláttuk.

Az előírhatósági tétel: létezés.

Bizonyítás: létezés
Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n$. Ez *jóldefiniált*, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.
Az A *összegtartó*, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor $v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így
$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) c_n$.
$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n)$,
azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.
A *skalárszorostartás* bizonyítása hasonló: HF.
Mivel $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \ldots + 0 \cdot b_n$,
ezért $A(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \ldots + 0 \cdot c_n = c_1$.
Hasonlóan $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Mátrix bázispárban.

Definíció (Freud, 5.7.1. Definíció)
$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis V-ben, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ bázis W-ben.
Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A *mátrixa* a $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ bázispárban
$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \Big[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \ldots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \Big] \in T^{m \times n}$.
A mátrix j-edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a $\mathbf{d}$ bázisban.

Azaz $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \ldots & \lambda_{mn} \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy

$A(b_1) = \lambda_{11} d_1 + \ldots + \lambda_{m1} d_m, \ldots, A(b_n) = \lambda_{1n} d_1 + \ldots + \lambda_{mn} d_m$.

Az előző félév példáiban a sík szokásos bázisa szerepelt.

Mátrixok és leképezések: egyértelműség.

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)
Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés *kölcsönösen egyértelmű* $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás
$w \mapsto [w]_\mathbf{d}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme *egyértelműen* írható $\lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_m c_m$ alakban.

Ha $A \neq B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ és $B(b_1), \ldots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz A és B mátrixa különböző.

Ha adott egy $M \in T^{m\times n}$ mátrix, akkor annak oszlopvektorai egy $c_1, \ldots, c_m$ vektorrendszert adnak W-ben, és az előírhatósági tételből kapott A leképezésnek M lesz a mátrixa.

2. Mátrix és műveletek

Mátrixok és leképezések: összegtartás.

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)
Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés *összegtartó* $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás
$w \mapsto [w]_\mathbf{d}$ összegtartó W és T^m között (HF volt múltkor).

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A + B$ definíciója miatt. Így $[(A + B)(b_i)]_\mathbf{d} = [A(b_i) + B(b_i)]_\mathbf{d} = [A(b_i)]_\mathbf{d} + [B(b_i)]_\mathbf{d}$. Vagyis $A + B$ mátrixának oszlopai az A, illetve a B mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei. A mátrixok összeadásának definíciója miatt tehát $[A + B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} + [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$. Ez jelenti azt, hogy $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ összegtartó.

Mátrixok és leképezések: skalárszorostartás.

Tétel (Freud, 5.7.4. Tétel)
Rögzített **b** és **d** bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés *lineáris és bijektív* $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között.

Bizonyítás
Már csak a skalárszorostartást kell belátni. $w \mapsto [w]_\mathbf{d}$ skalárszorostartó W és T^m között (múltkor).

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$ a λA definíciója miatt. Így $[(\lambda A)(b_i)]_\mathbf{d} = [\lambda A(b_i)]_\mathbf{d} = \lambda[A(b_i)]_\mathbf{d}$. Vagyis λA mátrixának oszlopai az A mátrixából vett megfelelő oszlopok λ-szorosai. A mátrixok λ-szorosának definíciója miatt tehát $[\lambda A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \lambda[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$. Ez jelenti azt, hogy $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ skalárszorostartó.

Vektor képének kiszámítása.

Tétel (Freud, 5.7.3. Tétel)
Legyen **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben, $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $v \in V$.
Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a **b**).

Bizonyítás
Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk: $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n)$,
és hogy $A(b_j) = \lambda_{1j} d_1 + \ldots + \lambda_{mj} d_m$. Behelyettesítve
$A(v) = (\lambda_{11}\mu_1 + \ldots + \lambda_{1n}\mu_n)d_1 + \ldots + (\lambda_{m1}\mu_1 + \ldots + \lambda_{mn}\mu_n)d_m$.

Szorzat mátrixa.

Tétel (Freud, 5.7.6. Tétel)
Legyen **a** bázis U-ban, **b** bázis V-ben, **d** bázis W-ben,
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF, az előzőhöz hasonló számolás.
Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a **b**).

Következmény
Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]^{-1}_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$.

Bizonyítás
$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$, ami az egységmátrix.
Hasonlóan $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}$ is az egységmátrix.

3. Izomorf vektorterek

Példák izomorfizmusra.

Definíció (Freud, 5.2.1. Definíció)
Az $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *izomorfizmus*, ha kölcsönösen egyértelmű. A V és W *izomorf* vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus. Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa
Ha V vektortér a T test fölött, és $\mathbf{b}$ bázis V-ben, akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között. Ezért minden V vektortér izomorf $T^{\dim(V)}$-vel.

Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben, $\mathbf{d}$ bázis W-ben. Ekkor $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ izomorfizmus $\mathrm{Hom}(V, W)$ és $T^{m\times n}$ között. Vagyis $\mathrm{Hom}(V, W) \cong T^{\dim(W)\times\dim(V)}$.

Az izomorfizmus jellemzése.

Tétel (Freud, 5.2.5. Tétel)
Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.
Következmény: $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő. Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben és $d_1, \ldots, d_n$ bázis W-ben. Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re.
HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.
Megfordítva: ha $A : V \to W$ izomorfizmus és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben, akkor
HF: $A(b_1), \ldots, A(b_n)$ bázis W-ben. Ezért a két dimenzió megegyezik.

4. Bázistranszformáció

Transzformáció mátrixa új bázisban.

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)
Legyenek $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ bázisok V-ben, $v \in V$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Jelölje $S = \Big[[d_1]_{\mathbf{b}}, \ldots, [d_n]_{\mathbf{b}}\Big] \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot,
amelynek oszlopaiban a $\mathbf{d}$ vektorainak koordinátái állnak a $\mathbf{b}$ bázisban.
Ekkor $[v]_{\mathbf{d}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$, továbbá $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás
Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j-re. Nyilván $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = S^{-1}$.
Nyilván $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = E$ és $[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = E$ (az egységmátrix).
Ezért $[v]_{\mathbf{d}} = [BC(v)]_{\mathbf{d}} = [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[C]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = ES^{-1}[v]_{\mathbf{b}} = S^{-1}[v]_{\mathbf{b}}$. A másik állítás HF az $A = BCABC$ felhasználásával.

HF: $[B]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S$ és $[C]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}$.

Távolságtartó transzformációk.

Tétel (Freud, 8.5.6. Tétel)
Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációra ekvivalensek:

(1) Az A ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

(2) Az A távolságtartó, azaz minden $u, v \in \mathbb{R}^n$-re $\|A(u) - A(v)\| = \|u - v\|$.

(3) A invertálható, és tetszőleges ortonormált bázisban A^{-1} mátrixa az A mátrixának transzponáltja.

Az ilyen A neve *ortogonális* transzformáció.

Ha $\mathbf{b}$ ortonormált bázis, akkor a bázistranszformáció során pontosan akkor kapunk ortonormált $\mathbf{d}$ bázist, ha az áttérést leíró S mátrix ortogonális, azaz $S^{-1} = S^T$. Ekkor a bázistranszformáció képlete $[v]_{\mathbf{d}} = S^T[v]_{\mathbf{b}}$ és $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^T[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$.

Bizonyítás a következő félévben.