1. Alterek összege és direkt összege

Alterek összege.

Állítás
Legyenek U és W alterek a V vektortérben. Ekkor $U+W = \{u+w \ : \ u \in U, w \in W\}$ is altér. Ez az U és W alterek *összege*.

Bizonyítás
$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$. Azaz $U + W$ zárt az összeadásra.
A λ-szorosra való zártság bizonyítása hasonló: HF.

$U+W$ a *legszűkebb* U-t és W-t tartalmazó altér. Hiszen minden ilyen altér tartalmazza az $u + w$ alakú összegeket.

Példák alterek összegére.

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely. $U+W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza. Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez *egyértelmű* is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, amelynek az 1 gyöke. Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből. Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$. Ez *nem egyértelmű*, például $x^2 = (x - 1) + (x^2 - x + 1)$ is. $U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2\times2}$ alsó háromszögmátrixaiból.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2\times2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.
Ez sem egyértelmű. $U \cap W$ a diagonális mátrixok.

Egyértelmű felírás összegként.

Állítás (Freud, 4.3.6. Tétel)
Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U, w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$. Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0 + v = v + 0$ is megfelelő, így a fölírás nem egyértelmű.

Direkt összeg.

Definíció (Freud, 4.3.7. Definíció)
Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W *direkt összege*, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza. W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak. Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros. W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan. Ekkor $T[x] = U \oplus W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója.

Állítás
Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás
Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Mivel $c_1, \ldots, c_m$ független, ezért $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. $\square$

Direkt kiegészítő altér.

Definíció
Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$. Ekkor W az U (egyik) *direkt kiegészítő altere*.

Állítás
Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben
Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-*ban*. Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá. Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$.
Ekkor $V = U \oplus W$. A bizonyítás hasonló az előző tételéhez: HF.

Ortogonális kiegészítő altér.

Definíció
Az $u, w \in \mathbb{R}^n$ vektorok *merőlegesek* (ortogonálisak), ha $\langle u, w \rangle = 0$. Jele $u \perp w$. Ha U altér $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $U^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^n \ : \ \text{minden } u \in U\text{-ra } w \perp u\}$ az U *ortogonális kiegészítő altere.*

Állítás
Ha U altér $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$.

Bizonyításvázlat
$U \cap U^{\perp} = \{0\}$, mert csak a nullvektor merőleges önmagára. Olyan $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázist készítünk $\mathbb{R}^n$-ben, melyenek első néhány vektora ortonormált bázis U-ban. Eszköz: *Gram–Schmidt-ortogonalizáció* (következő félévben).

2. Lineáris leképezések

A lineáris leképezés fogalma.

Definíció (Freud, 5.1.1. Definíció)
Legyenek V és W vektorterek *UGYANAZON* T test fölött. Az $A : V \to W$ *lineáris leképezés*, ha

(1) *összegtartó*, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$;

(2) *skalárszorostartó*, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén $A(\lambda v) = \lambda A(v)$.

Állítás (Freud, 5.1.2. Tétel)
Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz, azaz $A(0_V) = 0_W$ és $A(-v) = -A(v)$.

Bizonyítási ötlet az első állításra
$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V)$, adjunk hozzá $-A(0_V)$-t.

Példák lineáris leképezésre.

(1) A sík és a tér origót fixáló egybevágósági és hasonlósági transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).

(2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$.

(3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).

(4) $V = T[x]$ a T fölött, $W = T$ önmaga fölött. $A(p) = p(1)$ (az 1 elem behelyettesítése). Az 1 helyett T bármely rögzített elemét behelyettesíthetjük.

(5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
$B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V-ben és $A(v) = [v]_B$.

(6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$.
Ez a *nulla leképezés*, jele 0.

(7) $V = W$ tetszőleges vektortér, $A(v) = v$.
Ez az *identikus leképezés*, jele I vagy I_V.

Lineáris leképezések összege és skalárszorosa.

Definíció (Freud, 5.5.1. és 5.5.2. Definíció)
Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött. Az $A : V \to W$ lineáris leképezések halmaza $\mathrm{Hom}(V, W)$.
Legyen $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $\lambda \in T$.

(1) A és B *összege* $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$-re.

(2) A λ-*szorosa* $(\lambda A)(v) = \lambda\big(A(v)\big)$ minden $v \in V$-re.

Állítás (Freud, 5.1.3. Tétel)
Két lineáris leképezés összege, és egy lineáris leképezés skalárszorosa is lineáris leképezés. Erre a két műveletre $\mathrm{Hom}(V, W)$ *vektorteret* alkot. Nullelem: a nulla leképezés.
Az A ellentettje: $(-A)(v) = -A(v)$.

FONTOS házi feladat önállóan kidolgozni a bizonyítást!

Lineáris leképezések szorzata.

Definíció (Freud, 5.6.1. Definíció)
Legyenek U, V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.
Az $A : V \to W$ és a $B : U \to V$ lineáris leképezések *szorzata* (kompozíciója) $(AB)(u) = A\big(B(u)\big)$ minden $u \in U$-ra.

HF: AB is lineáris leképezés (Freud, 5.6.2. Tétel).

Elnevezés
$\mathrm{Hom}(V, V)$ rövidítve $\mathrm{Hom}(V)$, elemei lineáris *transzformációk*.

Állítás (Freud, 5.6.3. Tétel)
Ha V vektortér, akkor $\mathrm{Hom}(V)$ *gyűrű* az összeadásra és a szorzásra,
és $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ $(A, B \in \mathrm{Hom}(V), \lambda \in T)$.

FONTOS házi feladat önállóan kidolgozni a bizonyítást!