1. Függés és függetlenség

Lineáris függetlenség és generátorrendszer.

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
Ezek a vektorok *lineárisan függetlenek*, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ *CSAK ÚGY* teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla.
Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha *CSAK* a triviális lineáris kombinációjuk nulla. *Lineárisan összefüggő*: nem lineárisan független.

v *lineárisan függ* $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

$v_1, \ldots, v_m$ *generátorrendszer*, ha V minden vektora függ tőle.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől.

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel III.)
Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor *VAN közöttük olyan*, amely lineárisan függ a többiektől.

Az *nem igaz*, hogy *mindegyik* függ a többiektől! Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)
v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla. Ha például $\lambda_2 \neq 0$, akkor $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$. □

A függés és függetlenség további kapcsolata.

2. Lemma (Freud, 4.4.3. Tétel IV.)
Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás
Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$. Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll). Ezért v kifejezhető, azaz függ $v_1, \ldots, v_m$-től. □

A függés és függetlenség további tulajdonságai.

Állítás (Freud, 4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

(3) A függés *tranzitív* a következő értelemben. Ha az $Y = \{w_1, \dots, w_n\}$ vektorrendszer minden eleme függ az $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ vektorrendszertől, és v függ Y-tól, akkor v függ X-től is.

Bizonyítás (3)**-ra**
$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ alkalmas λ_j skalárokra.
Mindegyik w_j felírható $\mu_{j1} v_1 + \dots + \mu_{jm} v_m$ alakban. Ezeket behelyettesítve v felírását kapjuk $v_1, \dots, v_m$-mel. □

A kicserélési tétel.

Tétel (Freud, 4.5.5. Lemma)
Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F minden eleme *kicserélhető* a G egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer független maradjon. Vagyis minden $f_j \in F$-hez van olyan $g_k \in G$, hogy $g_k \notin F$, de $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ független rendszer.

Bizonyítás
Indirekt: tegyük föl, hogy f_j-hez egyik g_k sem jó. Vagyis $F \setminus \{f_j\} \cup \{g_k\}$ minden $g_k \notin F$-re összefüggő.
De $F \setminus \{f_j\} \subseteq F$ független, így g_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től (2. Lemma). Ez $g_k \in F$ esetén is igaz, így G minden eleme függ $F \setminus \{f_j\}$-től.
f_k függ G-től, így a függés tranzitivitása miatt f_k függ $F \setminus \{f_j\}$-től. Ez ellentmond annak, hogy F független. □

A kicserélési tétel következményei.

Következmény
Ha $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ vektorrendszer, amitől az $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ független rendszer minden eleme függ, akkor F elemszáma legfeljebb akkora, mint G elemszáma.
Speciálisan minden független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges generátorrenszeré.
Speciálisan bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás
Az F elemszáma m, a G elemszáma n. A kicserélési tétel segítségével F elemeit sorban kicseréljük G egy-egy megfelelő elemével. A tétel miatt végig független rendszereket kapunk (elemeik továbbra is függenek G-től). A kapott független rendszerek elemszáma végig m marad. A legvégén kapott F' része G-nek, tehát $m \leq n$. □

2. A bázis jellemzései

A bázis független generátorrendszer.

Ismétlés
A $b_1, \ldots, b_n$ *bázis* a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Állítás (Freud, 4.5.2. Tétel)
A bázisok a lineárisan független generátorrendszerek.

Bizonyításvázlat
Ha bázis, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $\lambda_j = 0$.
Ha független és generátorrendszer, akkor bázis, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen
$(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt
$\lambda_j - \mu_j = 0$, azaz $\lambda_j = \mu_j$ minden j-re (tehát egyértelmű). $\square$

Bázis = maximális független.

Állítás
A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor *bázis* a V vektortérben, ha *maximális* független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő, azaz $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő. De $b_1, \ldots, b_n$ független, így a 2. Lemma miatt v függ $b_1, \ldots, b_n$-től. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer is. $\square$

Bázis = minimális generátorrendszer.

Állítás
A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor *bázis* a V vektortérben, ha *minimális* generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik eleme, mondjuk b_1, függene a többiektől. Ekkor a függés tranzitivitása miatt $b_2, \ldots, b_n$ generátorrendszer lenne, ami ellentmond $b_1, \ldots, b_n$ minimalitásának. $\square$

Bázis készítése.

Következmény (Freud, 4.5.7. Tétel)
Végesen generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás
Vegyünk hozzá, amíg maximális független nem lesz. A kicserélési tétel miatt ez véges sok lépésben véget ér.

Következmény (Freud, 4.5.6. Tétel)
Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bizonyítás
Hagyjunk el belőle, míg minimális generátorrendszer nem lesz.

Valódi altér dimenziója.

Tétel (Freud, 4.6.4. Tétel)
Legyen V véges dimenziós vektortér és W *valódi*, vagyis az egész V-től különböző *altér*. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Bizonyítás
Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor a kicserélési tétel miatt W-ben minden független rendszer legfeljebb n elemű, és így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Ha $m = n$, akkor a kicserélési tétel miatt $b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is, és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is, de W-ben is. Ezért az általa generált altér W is és V is, azaz $W = V$. □