1. Generátorrendszer

Generátorrendszer.

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben. Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által *generált altér*, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Elnevezések
A $v_1, \ldots, v_m$ vektorok neve: *generátorok*. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ a $v_1, \ldots, v_m$ egy *lineáris kombinációja*. A $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az *együtthatói*.
A $v_1, \ldots, v_m$ *generátorrendszer* a V vektortérben, ha $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = V$.

A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.
Egy vektortérnek általában sok generátorrendszere van!

Példák generátorrendszerre.

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak! Például $\{1, x, x^2\}$ *nem* generátorrendszer a fenti V-ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)
Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok, akkor generátorrendszert alkotnak a sík vektorainak vektorterében.

Lineáris függetlenség.

Ismétlés (Freud, 4.4. szakasz)
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$. Ezek a vektorok *lineárisan függetlenek*, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ *CSAK ÚGY* teljesülhet, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Elnevezés
Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla. Vagyis $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha *CSAK* a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együttható nulla, azaz $a = b = c = 0$.

2. Bázis

A bázis fogalma.

Definíció
Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$. Ezek *bázist* alkotnak V-ben, ha V minden eleme *egyértelműen felírható* a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Példák
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbb{R}$ fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ebben $1, x, x^2$ bázis, mert minden V-beli polinom egyértelműen felírható $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x + \nu \cdot x^2$ alakban ($\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$).
HF: $1 + x, 1 + x^2, x^2$ is bázis V-ben.

A bázis mint koordinátarendszer.

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy *koordinátarendszert* vezetünk be (lehet „ferdeszögű" is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)
Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \dots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$, akkor $[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$ a v *koordinátavektora* ebben a bázisban.

A koordinátázás haszna
A keletkező T^n-beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti V vektortér elemeivel, amik bonyolult dolgok (például függvények, geometriai transzformációk) is lehetnek.

Példák koordinátákra.

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között. A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.
Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.

Persze B' „ferdeszögű” koordinátarendszert ad a síkon, hiszen $1 + i$ nem merőleges i-re.

A koordináták kiszámítása.

Általában egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?
$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$. A valós és képzetes rész: $x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer. Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4 + i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis. *Bázistranszformáció*: később.

Szokásos bázisok.

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket *szokásos* bázisnak nevezzük.

(1) A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \dots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A sorrend fontos: $(e_1, \dots, e_n)$.

(2) A T-ben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

(3) A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i.

(4) A $T^{m\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

(5) A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

(6) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ bázis.

3. Dimenzió

A bázis elemszáma.

Tétel (Freud, 4.5.3. Tétel)
Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció
A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér *dimenziójának* nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

(1) $\dim_T T^n = n$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

(4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.

(5) A sík kétdimenziós $\mathbb{R}$ fölött.

(6) A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortér $n+1$-dimenziós T fölött.

A bázis jellemzései.

Tétel (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)
Az alábbi állítások egy véges dimenziós vektortérről szólnak.

(1) A bázisok pontosan a lineárisan független generátorrendszerek.

(2) Egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré.

(3) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha *maximális független*, azaz bármelyik vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

(4) Egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha *minimális generátorrendszer*, azaz bármelyik vektort elhagyva már nem generátorrendszer.

(5) Valódi (az egész tértől különböző) altér dimenziója kisebb, mint az egész tér dimenziója.

Bázis és dimenzió.

Következmény (Freud, 4.5. és 4.6. szakasz)
Az alábbi állítások véges, n-dimenziós vektortérről szólnak.

(1) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

(2) Minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

(3) n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

(4) n-nél kevesebb vektor nem alkothat generátorrendszert.

(5) Bármely n elemű független rendszer bázis.

(6) Bármely n elemű generátorrendszer bázis.

Az előző tételt legközelebb bizonyítjuk. Ennek alapján a fenti következmény igazolása Házi Feladat.

Végtelen dimenziós vektorterekkel nem foglalkozunk. Ha van véges generátorrendszer, akkor a tér véges dimenziós.

4. Skaláris szorzat

Skaláris szorzat és norma.

Definíció
Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
Ekkor v és w *skaláris szorzata* $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Ismerjük középiskolai geometriából és fizikából. Általános vektortéren csak a következő félévben vizsgáljuk.

Definíció
A $v \in \mathbb{R}^n$ *normája* vagy *hossza* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos. A definíció értelmes, mert $\langle v, v \rangle \geq 0$ (négyzetösszeg).

Középiskolából tudjuk: a síkon $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos\varphi$, ahol φ a két vektor szöge.

Vektorok szöge.

Definíció
Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. A v és w *szöge* az a $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, melyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos\varphi$.

Be kell látni, hogy ez értelmes, azaz $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség
Tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$.

Az egyik bizonyítás $n = 2$ esetén
$\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$, ami nemnegatív. □

A skaláris szorzat bilineáris.

Állítás (Freud, 8.1. szakasz)
A skaláris szorzat mindegyik változójában lineáris. Azaz tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

(2) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$;

(3) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$;

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

Bizonyítás
Házi Feladat, közvetlen számolással.

Ortonormált bázis.

Definíció
A $b_1, \dots, b_n$ *ortonormált bázis* $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j\rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.

Állítás
Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \dots \\ \langle v, b_n\rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva
$\langle v, b_i\rangle = \lambda_1\langle b_1, b_i\rangle + \dots + \lambda_n\langle b_n, b_i\rangle = \lambda_i\langle b_i, b_i\rangle = \lambda_i$. $\square$