1. A csoportok osztályozása

Ismétlés.

Minden *kételemű* csoport izomorf $\mathbb{Z}_2^+$-szal.

4.4.23. Tétel
Ha p prím, akkor minden p *rendű* csoport izomorf $\mathbb{Z}_p^+$-szal.

Vagyis *izomorfia erejéig* csak egy darab p elemű csoport van.

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$, de nem izomorfak $\mathbb{Z}_8^\times$-cal, mert abban nincs negyedrendű elem, vagyis nem ciklikus.

Négyelemű csoportok.
A *Klein-csoport:* minden elem négyzete az egységelem; Bármely két egységtől különböző elem szorzata a harmadik.

Klein:

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

ciklikus:

	1	g	g^2	g^3
1	1	g	g^2	g^3
g	g	g^2	g^3	1
g^2	g^2	g^3	1	g
g^3	g^3	1	g	g^2

Példák Klein-csoportra:
A téglalap/rombusz szimmetriacsoportja, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$,
$\{1, f^2, t, tf^2\} \leq D_4$, $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq A_4$.

Példák négyelemű ciklikus csoportra:
$\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\{1, f, f^2, f^3\} \leq D_4$, $\{id, (1234), (13)(24), (1432)\} \leq S_4$.

A négyelemű csoportok osztályozása.

4.5.18. Tétel
Minden *négyelemű* csoport a négyelemű ciklikus csoporttal, vagy a Klein-csoporttal izomorf, attól függően, hogy van-e benne negyedrendű elem, vagy nincs.

Bizonyítás
Legyen $|G| = 4$. Ha van negyedrendű elem, akkor az általa generált részcsoport négyelemű, tehát G ciklikus.
Tegyük föl, hogy nincs, legyen $G = \{1, a, b, c\}$. Ekkor a, b, c rendje Lagrange tétele miatt 2, azaz $a^2 = b^2 = c^2 = 1$.

$ab = ?$ Nem 1, mert $ab = 1 \implies b = 1b = abb = a$.
Nem a, mert $ab = a$-t a-val egyszerűsítve $b = 1$ lenne.
Hasonlóképpen ab nem lehet b, tehát $ab = c$.
Ugyanígy: a, b, c közül bármely kettő szorzata a harmadik. □

Prímnégyzet elemszámú csoportok.

4.11.3. Következmény
Minden *prímnégyzet* rendű csoport kommutatív.

A bizonyítás jövőre lesz, de csak matematikus szakirányon.

Következmény
Ha p prím, akkor izomorfia erejéig két p^2 *rendű* csoport van: $\mathbb{Z}^+_{p^2}$ és $\mathbb{Z}^+_p \times \mathbb{Z}^+_p$.

Ezek nem izomorfak a véges Abel-csoportok alaptételének egyértelműségi állítása miatt, vagy mert $(\mathbb{Z}^+_p)^2$ nem ciklikus.

Tehát izomorfia erejéig rendre két 4, 9, 25 rendű csoport van.
Izomorfia erejéig egy-egy 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 rendű csoport van.

Kimaradt: 6, 8, 10, 12.

Hatodrendű csoportok.

4.8.37. Gyakorlat (NB)
Legyen p páratlan prímszám. Ekkor egy $2p$ *rendű* csoport vagy ciklikus, vagy a D_{2p} diédercsoporttal izomorf.

Nem izomorfak, mert csak az egyik kommutatív.

Következmény
Tehát hatodrendű és tizedrendű csoportból is kettő van.

4.5.16. Gyakorlat: $S_3 \cong D_3$.

Bizonyítás
Mindkettő egy háromelemű halmaz összes permutációiból áll. A D_3 esetében ezek a szabályos háromszög csúcsai.

Nyolcadrendű csoportok.

4.11.10. Feladat (NB)
Nyolcadrendű csoport ötféle létezik.
Nemkommutatívak: a D_4 diédercsoport és a Q kvaterniócsoport.
Kommutatívak: $\mathbb{Z}^+_8$, $\mathbb{Z}^+_4 \times \mathbb{Z}^+_2$, $\mathbb{Z}^+_2 \times \mathbb{Z}^+_2 \times \mathbb{Z}^+_2$.

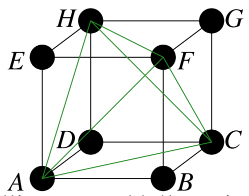
D_4 nem izomorf Q-val, mert D_4-ben öt darab, Q-ban pedig csak egy darab másodrendű elem van. A három kommutatív csoport is páronként nemizomorf: a másodrendű elemek száma rendre 1, 3, 7.

4.11. szakasz (NB)
Minden p prímre két nemkommutatív és három kommutatív p^3 *rendű* csoport van.

A kis (legfeljebb 30 elemű) csoportok táblázata: Kiss-jegyzet, 682. oldal.

A kocka szimmetriacsoportja.

4.9.32. Feladat
A kocka szimmetriacsoportja izomorf $S_4 \times \mathbb{Z}_2^+$-vel.



$ACFH$ szabályos tetraéder.
$BDEG$ szintén.

Álljon K azokból a szimmetriákból, amelyek $ACFH$-t fixálják. A többi szimmetria $ACFH$-t a $BDEG$-be viszi. Ezért a K részcsoport indexe 2 (HF), és így K normálosztó. Továbbá $K \cong S_4$, hiszen 24 elemű, és része $S_{\{A,C,F,H\}}$-nak. Legyen $L = \{id, r\}$, ahol r a középpontos tükrözés. L normálosztó, mert r minden transzformációval felcserélhető. Így a kocka szimmetriacsoportja izomorf $K \times L$-lel.

2. Egyszerű csoportok

Kommutatív egyszerű csoportok.

4.8.2. Definíció
A G csoportot *egyszerű csoportnak* nevezzük, ha pontosan két normálosztója van: a triviálisak (vagyis $\{1\}$ és G).

Az egyelemű csoport nem egyszerű!

4.8.3. Következmény
A kommutatív egyszerű csoportok pontosan a prímrendű ciklikus csoportok.

Bizonyítás
Egy Abel-csoportban minden részcsoport nyilván normálosztó. Tehát a kommutatív egyszerű csoportok azok, amelyeknek pontosan két részcsoportja van. Láttuk, hogy ezek pont a prímrendű ciklikus csoportok.

Két fontos példa.

4.12.30. Tétel (NB)
Az A_n alternáló csoport egyszerű, ha $n \geq 5$.

Következmény: A legalább ötödfokú általános egyenletekre nincs megoldóképlet (négy alapművelettel és gyökvonással).

4.12.36. Gyakorlat (NB)
Ha $n \geq 5$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

4.8.42. Feladat (NB)
A gömb mozgáscsoportja, azaz $\mathrm{SO}(3)$ egyszerű csoport.

4.9.13. Gyakorlat (NB)
A gömb szimmetriacsoportja, $\mathrm{O}(3) \cong \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{Z}_2^+$.