1. Számolás a faktorcsoportban

Példa faktorcsoportra.

4.8.38. Példa
Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$
$S = tfN, \quad T = tN \implies ST = tftN = ?$
Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.
Elemrend: *F rendje* 2, mert $F^2 = f^2N = N$, de $F \neq N$.
Viszont f rendje D_4-ben 4.

Elemrend a faktorcsoportban.

4.7.20. Állítás
Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás
A k egész pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme). De $(gN)^k = g^kN$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként). Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^kN = N$, azaz ha $g^k \in N$. Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk.

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times} / \{1, 15\}$ ciklikus, mert $3\{1, 15\}$ rendje 4.
$\mathbb{Z}_{16}^{\times} / \{1, 9\}$ nem ciklikus, minden elemrend 1 vagy 2.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel.

4.7.17. Gyakorlat
Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás
Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^{\times}$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$. Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$. Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, mert $\cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) = 1$ akkor és csak akkor, ha r egész szám. Ezért a homomorfizmustétel miatt $K = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathbb{R}^+ / \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$.

Ennél a módszernél előre meg kell tippelni, mi a faktorcsoport.

2. Normálosztó keresése

A normálosztó jellemzései.

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás
Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat
(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$. De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$, azaz $gN \subseteq Ng$ minden $g \in G$-re. Ezt g helyett g^{-1}-re alkalmazva $g^{-1}N \subseteq Ng^{-1}$ adódik, ahonnan g-vel jobbról és balról szorozva $Ng \subseteq gN$.

Kis indexű részcsoportok.

Ha G csoport, akkor $\{1\}$ és G mindig normálosztó. Ezek G *triviális normálosztói*.

4.7.19. Állítás
Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás
Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint. Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$. Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz. Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$.

Az S_3-ban $\{id, (12)\}$ három indexű, és nem normálosztó. Páratlan rendű csoportban viszont minden három indexű részcsoport normálosztó (4.12.42. Feladat).

A konjugálás.

4.1.19. Definíció
Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot *az x elem g-vel vett konjugáltjának* nevezzük ($x \in G$). Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való *konjugálás*.

Tehát egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha *zárt a konjugálásra*.

4.8.14. Gyakorlat
Az S_n szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor vihető egymásba konjugálással, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma”, azaz ugyanannyi, ugyanolyan hosszú ciklus szerepel bennük.

Normálosztó keresése *konjugált elemosztályok* segítségével: 4.8. szakasz (vizsgára nem kell tudni).

3. A direkt szorzat belső jellemzése

A projekciók és magjaik.

Az $A \times B$ direkt szorzat elemei az összes (a, b) párok, ahol $a \in A$ és $b \in B$. Szorzás: $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$.

Legyen $\pi_1 : A \times B \to A$, ahol $\pi_1 : (a, b) \mapsto a$.
Legyen $\pi_2 : A \times B \to B$, ahol $\pi_2 : (a, b) \mapsto b$.
Ez a két *projekció* (homomorfizmus).

4.9.11. Állítás
Legyen $\mathrm{Ker}(\pi_2) = A^* = \{(a, 1_B) : a \in A\} = A \times \{1_B\}$;
Legyen $\mathrm{Ker}(\pi_1) = B^* = \{(1_A, b) : b \in B\} = \{1_A\} \times B$.
Ezek tehát normálosztók $A \times B$-ben.
A homomorfizmustétel miatt $(A \times B)/A^* \cong B$ és $(A \times B)/B^* \cong A$.
Nyilván $A^* \cap B^* = (1_A, 1_B)$. Továbbá $A^* B^* = A \times B$, mert $(a, b) = (a, 1_B)(1_A, b)$.

Felcserélhető elemek.

4.8.25. Gyakorlat
Ha A, B normálosztók egy csoportban és $A \cap B = \{1\}$, akkor A minden eleme *felcserélhető* B minden elemével.

Bizonyítás
Legyen $a \in A$ és $b \in B$. Tekintsük a $g = aba^{-1}b^{-1}$ elemet. Belátjuk, hogy $g \in B$. Nyilván $g = (aba^{-1})b^{-1}$, itt aba^{-1} a b-nek a-val vett konjugáltja. A B normálosztó zárt a konjugálásra, így $aba^{-1} \in B$. Mivel B részcsoport, zárt az inverzképzésre és a szorzásra, így $b^{-1} \in B$ és $g \in B$. A $g = a(ba^{-1}b^{-1})$ felírásból ugyanígy $g \in A$. Tehát $g \in A \cap B = \{1\}$, vagyis $1 = g = aba^{-1}b^{-1}$. Innen b-vel, majd a-val jobbról szorozva $ba = ab$.

$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ az a és b elemek *kommutátora*.

Direkt felbontás keresése.

4.9.12. Tétel
Legyen G csoport, és A, B normálosztók G-ben úgy, hogy $A \cap B = \{1\}$ és $AB = G$. Ekkor $G \cong A \times B$.

Bizonyítás
G minden eleme előáll ab alakban, ahol $a \in A$ és $b \in B$. Ez egyértelmű: ha $ab = a'b'$, ahol $a' \in A$ és $b' \in B$, akkor $a'^{-1}a = b'b^{-1} =: g$. A bal oldal A-nak, a jobb B-nek eleme. Tehát $g \in A \cap B = \{1\}$, ezért $a'^{-1}a = 1$ miatt $a = a'$, és $b = b'$. Így a $\varphi : (a, b) \mapsto ab$ leképezés bijekció $A \times B$ és G között.
Kell: φ szorzattartó. Láttuk, hogy $A \cap B = \{1\}$ miatt A elemei fölcserélhetők B elemeivel. Ha $a, a' \in A$ és $b, b' \in B$, akkor $a'b = ba'$, így
$\varphi\big((a, b)(a', b')\big) = \varphi\big((aa', bb')\big) = aa'bb' = aba'b' = \varphi\big((a, b)\big)\varphi\big((a', b')\big)$.

Több tényezős direkt szorzat.

Lineáris algebrában ugyanez a feltétel szerepelt: $V = U \oplus W$ ha $U \cap W = \{0\}$ és $U + W = V$. Ebből az additív csoportra kapunk direkt felbontásokat. Például a sík két koordinátatengely direkt összege. Ha e, f, g origón átmenő, páronként különböző egyenesek, akkor a sík (additív csoportja) *nem lesz* $e \oplus f \oplus g$.

4.9.14. Gyakorlat (alapszinten NB)
A G csoport akkor és csak akkor izomorf $A \times B \times C$-vel, ha vannak benne ezekkel izomorf olyan A^*, B^*, C^* normálosztók, hogy $G = A^*B^*C^*$, továbbá
$A^* \cap (B^*C^*) = \{1\}, \quad B^* \cap (A^*C^*) = \{1\}, \quad C^* \cap (A^*B^*) = \{1\}.$

Ugyanígy véges sok tényezőre: mindegyik normálosztó „diszjunkt” a többiek szorzatától.

Példa direkt felbontásra.

4.9.3. Gyakorlat
Legyen $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Minden elem másodrendű, kivéve 1.
Ha $A = \{1, 3\}, \qquad B = \{1, 5\}, \qquad C = \{1, 7\}$,
akkor $G \cong A \times B \cong A \times C \cong B \times C \cong \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$.
Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.
Ha A, B részcsoportok, akkor $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$ (4.4.31. Gyakorlat). Így ha $A \cap B = \{1\}$, akkor $|AB| = |A||B|$.

4.9.25. Gyakorlat
Legyen $G = D_6$ (a 12 elemű diédercsoport).
Ha $A = \{1, f^3\}$ és $B = \{1, f^2, f^4, t, tf^2, tf^4\}$, akkor $G = D_6 \cong A \times B \cong \mathbb{Z}_2^+ \times D_3$.
A B a szabályos hatszögbe írt szabályos háromszöget megőrző szimmetriákból álló részcsoport.