1. Homomorfizmus

Izomorfizmus és homomorfizmus.

4.3.1. Definíció
Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre. A $\psi : G \to H$ leképezés *csoporthomomorfizmus*, ha *művelettartó*: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re. Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ *izomorfizmus*.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

(4) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.

(5) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).

(6) $G = \mathbb{R}[x]^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna.

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus, sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe. Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni, és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is. Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor. A „modellezés” a ”lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés
Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az összes szorzatot nem tudjuk áttekinteni. Az *előjelképzés* (homomorfizmus!) segít, mert ± 1-gyel könnyű számolni.

Elemi tulajdonságok.

2.2.44. Feladat
Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az *egységelemet az egységelembe* viszi, és *inverz képe a kép inverze* lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás
$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$. Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat
Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$. Ekkor $\varphi(g)$ rendje *osztója* g rendjének. Oka: φ tartja az egész kitevőjű hatványozást: $\varphi(g^k) = \varphi(g)^k$.

Homomorfizmus képe.

4.7.2. Definíció
Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$
a φ *képe* (vagyis a φ függvény értékkészlete). Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ *részcsoport* H-ban, és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

(3) G csoport, $G \leq H$, $\varphi(g) = g$. Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi) = G$, és így *minden részcsoport egy alkalmas homomorfizmus képe*.

Homomorfizmus magja.

4.7.4. Definíció
Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \, : \, \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$
a φ *magja* (itt 1_H a H csoport egységeleme). Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *részcsoport* G-ben, és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ a forgatások.

(3) $G = \mathbb{R}[x]^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az $x^2 + 1$ többszöröseiből áll (HF).

2. Normálosztó és faktorcsoport

Nem minden részcsoport homorfizmusmag.

4.7.11. Tétel
A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve *normálosztó*, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert
$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$
$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN$.
$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$
$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng$.

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,
mert $(123)H = \{(123), (13))\} \neq H(123) = \{(123), (23)\}$.

Faktorcsoport.

4.7.12. Állítás
Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a
$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$
képlettel. Ekkor K csoport, egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$. Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció
A K a G csoport N szerinti *faktorcsoportja*, jele G/N.
A ψ neve *természetes homomorfizmus*.

A jóldefiniáltság problémája.

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín"? Egy narancsnak a színe. Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín"? Semmit, *rosszul definiált* fogalom. Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1 = g_1'N$ és $M_2 = g_2'N$, akkor *AZT KELL ELLENŐRIZNI*, hogy $g_1g_2N = g_1'g_2'N$. Vagyis ha máshogy reprezentáljuk, ugyanaz lesz a szorzat.

A jóldefiniáltság bizonyítása.

Kell: $M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N = g_1Ng_2' = g_1'Ng_2' = g_1'g_2'N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)
A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.
A $\psi(g) = gN$ természetes homomorfizmus tényleg homomorfizmus,
melynek magja N.

A homomorfizmustétel.

4.7.16 Homomorfizmustétel
Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyításvázlat
Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, művelettartó és kölcsönösen egyértelmű.

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra *dimenziótételével:* $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$, és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg *faktortér* (és a faktorgyűrű) fogalma is.
Alkalmazás: a komplex számok precíz bevezetése
(a következő félévben, 5.2.6. Állítás).