1. Pálya és stabilizátor

Permutációcsoportok.

4.5.1 Definíció
Legyen X halmaz, ennek elemeit néha *pontoknak* hívjuk. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait *transzformációcsoportoknak*, illetve véges X esetén *permutációcsoportoknak* nevezzük.

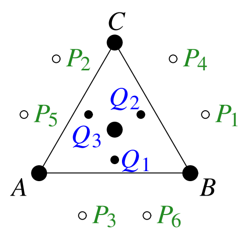
Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek a 12. előadáson).

Példák
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.
Egy téglalapnak, ami nem négyzet, úgyszintén (4.5.27).
Egy kockának 48 szimmetriája van.

Hogyan lehet ezeket megszámolni?

Példa pályára és stabilizátorra.

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja. A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés. Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 *pályája* hatelemű

Q_1 *pályája* háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont *pályája* egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen.

(Pálya elemszáma) $\times$ (fixáló trafók száma) $=$ csoport rendje

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése.
Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció
A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x *pályájának* (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya *hosszának* hívjuk.

4.5.2. Definíció
Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et *fixen hagyják*, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli *stabilizátora*, jele G_x.

4.5.8. Tétel
Egy pont pályájának a hossza a stabilizátorának az indexe.
Képletben: $|G(x)| = |G : G_x|$, és így $|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése.

4.5.3. Lemma
Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás
Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$.

A pálya-stabilizátor tétel bizonyításvázlata
$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$. A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$, mert ha g közös elemük lenne, akkor $y_1 = g(x) = y_2$ teljesülne.
α szürjektív: Ha $g \in G$ és $y = g(x) \in G(x)$, akkor $gG_x = \alpha(y)$.

2. A pályák partíciót alkotnak

A pályák diszjunktak.
Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy *partícióját* alkotják.

4.5.6. Állítás
Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak, és egyesítésük az egész X.
Elnevezés: G *tranzitív*, ha az egész X egyetlen pálya.

Ekvivalenciareláció.

4.4.8. Definíció
Az R relációt *ekvivalenciarelációnak* nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R *reflexív*, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

(2) R *szimmetrikus*, azaz ha $x \; R \; y$, akkor $y \; R \; x$.

(3) R *tranzitív*, azaz ha $x \; R \; y$ és $y \; R \; z$, akkor $x \; R \; z$.

4.4.9. Tétel (a bizonyítást lásd a jegyzetben)
Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a \; R \; x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják.

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők; az állítást úgy kell érteni, hogy bármely kettő vagy egyenlő, vagy diszjunkt.

Példák ekvivalenciarelációra.

Az egész számok halmazán a *kongruenciák*.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 *maradékosztályok*.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

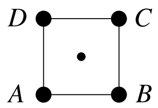
Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a \; R \; b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x \; R \; y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.
Ekkor R_x az $x \in X$ pályája, így a pályák partíciót alkotnak.

Mindhárom esetben ellenőrizni kell, hogy R ekvivalenciareláció!

3. Leszámlálási alkalmazások

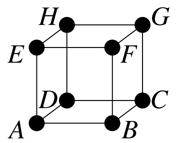
A négyzet szimmetriáinak a száma.



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják. A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható. Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$. Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával. De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C. Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$. Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű. A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t csak az identitás fixálja. Így $|H| = 2|H_B| = 2$. Tehát $|G| = 4|H| = 4 \cdot 2 = 8$.

A kocka szimmetriáinak a száma.



$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás
A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel. Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$. Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$). Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF). Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF). Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2|L_C| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

A Burnside-lemma.

4.5.30. Feladat
Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma (NB).

Példa
Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1. Az egységelemnek 4 fixpontja van. A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus. Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab. Az átlag: $\dfrac{4 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{12} = 1$.

Olyan leszámlálási feladatoknál hasznos, ahol bizonyos megoldásokat „nem tekintünk különbözőnek.” Ezek valamilyen *szimmetriával* vihetők egymásba.

A Burnside-lemma alkalmazása.

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. A második kérdés az orbitok száma!
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A $180°$-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9 - 1)/2 = 4$.
Egyik $90°$-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között (HF).
Így az orbitok száma $(36 + 4 + 2 \cdot 0)/4 = 10$.
Ha tükrözést is megengedünk, akkor a D_4 diédercsoportot kell használni. Az eredmény $(36 + 4 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 6)/8 = 8$.