1. A csoport fogalma

A csoport definíciója.

Definíció (Kiss-jegyzet, 2.2.13. Definíció)
A G nem üres halmaz *csoport*, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet *asszociatív*, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali *neutrális elem*, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re; (HF: csak egy neutrális elem lehet)

(3) minden $g \in G$-nek van kétoldali g^{-1} *inverze*, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$. (HF: minden elemnek csak egy inverze lehet)

Kommutatív csoport, vagy *Abel*-csoport:

(4) a $*$ *kommutatív*, azaz minden $g, h \in G$ esetén $g * h = h * g$.

A műveletek jelölése.

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve *szorzás*. A neutrális elem neve *egységelem*, jele 1. A g és h *fölcserélhető*, ha $gh = hg$. HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve *összeadás*. A neutrális elem neve *nullelem*, jele 0. Az inverz neve *ellentett*, jele $-g$.
A *kivonás* az ellentett hozzáadása: $g - h = g + (-h)$.

Asszociatív műveletnél egy *soktényezős* szorzatot akárhogy zárójelezünk, ugyanazt kapjuk (Kiss-jegyzet, 2.2.2. Feladat). Ha kommutatív is, akkor a tényezők sorrendje sem számít (Kiss-jegyzet, 2.2.5. Feladat).

2. Példák csoportokra

Additív és multiplikatív csoport.

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R *additív csoportja*, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_n^+, T^n, T^{n\times m}, \mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoport a szorzásra.
Ez az R *multiplikatív csoportja*, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok. A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű egységei).

$\left(T^{n\times n}\right)^\times$ elemei a nem nulla determinánsú mátrixok. E csoport neve *általános lineáris csoport*, jele $\mathrm{GL}(n, T)$.

HF: A $\mathbb{Z}_n^\times$ csoport elemei $0, 1, \ldots, n-1$ közül az n-hez *relatív prím* számok (Kiss-jegyzet, 2.2.3. Feladat). Speciálisan $\mathbb{Z}_p^\times$ elemszáma $p-1$, ha p prím.

A szimmetrikus csoport.

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X *transzformációinak* nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más. Ha X véges, akkor inkább *permutációkról* beszélünk.

Ismétlés
Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$. $f \circ g$ az f és g *kompozíciója* vagy *szorzata*, jele néha fg. Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív. Az identitás egységelem: $id(x) = x$ minden $x \in X$-re. Minden $f \in S_X$ függvénynek van kétoldali inverze: $h = f^{-1}$ azt jelenti, hogy $f(x) = y \iff h(y) = x$. Ezért S_X csoport a kompozícióra. Neve: *szimmetrikus csoport*.

3. Szimmetriacsoportok

A háromszögek szimmetriái.

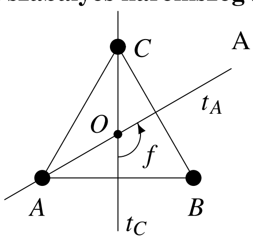
Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére. Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás: a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal. Ez utóbbi (az identitás) minden háromszögnek megvan.

Definíció
A háromszög szimmetriája a sík egy olyan egybevágósági transzformációja, ami a háromszöget önmagába képzi. Ilyenek kompozíciója és inverze is ilyen. Ezért *a szimmetriák csoportot alkotnak.*

HF: A szabályos háromszögnek csak e hat szimmetriája van.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja.



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$
$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?$ $\quad A \mapsto A \mapsto B;\quad B \mapsto C \mapsto A;\quad C \mapsto B \mapsto C$. Azaz t_C.
$t_C t_A = ?$ Forgatás a tengelyek szögének kétszeresével. Azaz f.

Cayley-táblázat.

A csoport *szorzástáblája* (Cayley-táblázat): A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

A csoport elemei $\{id,\ f,\ f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A, tf = t_B, tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id, \quad t^2 = id, \quad tft = f^{-1}(= f^2)$.
Példa: $t_B t_C = (tf)(tf^2) = (tft)f^2 = f^{-1}f^2 = f$.

A diédercsoport.
A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n *diédercsoport*.

Tétel (Kiss-jegyzet, 4.1.23. Állítás)
Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás, t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája. Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1,\ f,\ f^2, \ldots,\ f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$ (az első n transzformáció *forgatás*, a többi *tengelyes tükrözés*). A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1, \quad t^2 = 1, \quad tf^it = f^{-i}$ összefüggések. Ezekből minden szorzat kiszámítható:

$$f^i f^j = f^{i+j}, \qquad (tf^i)f^j = tf^{i+j},$$
$$f^i(tf^j) = tf^{j-i}, \qquad (tf^i)(tf^j) = f^{j-i},$$

ahol az f kitevőjében a $+$ és a $-$ jelek a mod n műveleteket jelentik. A tf^i elemek mindegyikének önmaga az inverze.

A kör és a gömb szimmetriacsoportja.
A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd Kiss-jegyzet, 4.1. szakasz)
Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α *forgatások*, továbbá az átmérőkre való *tengelyes tükrözések*. Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod 360° értendő). Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $tf_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$. A tf_α és $f_\alpha t$ is tükrözés, két tükrözés szorzata pedig forgatás.

A gömb szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(3)$.

Tétel (Kiss-jegyzet, 4.1.29. Feladat)
Az $\mathrm{O}(3)$ *irányítástartó* elemei a középponton átmenő egyenesek körüli forgatások. A gömb többi szimmetriája egy ilyen forgatásnak és egy középponton átmenő síkra való tükrözésnek a szorzata.

A sík „szimmetriái”.
E(2), illetve E(3) jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

Kiss-jegyzet, 4.1.13. Állítás
A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont *fixpont* ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) Csúsztatva tükrözések (egy tengelyre tükrözünk, utána a tengellyel párhuzamosan eltolunk): nincs fixpontjuk.

Az eltolások és a forgatások mozgások (irányítástartók), a tükrözések és a csúsztatva tükrözések nem. Minden egybevágóság előáll legfeljebb három tükrözés szorzataként.

4. Számolás további csoportokban

A kvaterniócsoport.

Kiss-jegyzet, 4.5.21. Gyakorlat
Elemek: $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$. Szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,
$ij = k, jk = i, ki = j$, viszont $ji = -k, kj = -i, ik = -j$.
Az asszociativitás ellenőrzése mátrixokkal gyorsabb.

Q	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

Ciklusfelbontás.

Kiss-jegyzet, 4.2.17. Definíció
Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: *ciklus*, melynek *hossza* k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Tétel (Kiss-jegyzet, 4.2.21. és 4.2.22)
Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

Példa: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} = (14752)(39)$.

Az előjel kiszámítása.

Kiss-jegyzet, 4.2.24. Következmény
Páros hosszú ciklus páratlan permutáció. Páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha diszjunkt ciklusokra bontva a *páros hosszú* ciklusok száma *páratlan*.

Bizonyítás
HF: $(x_1 \dots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\dots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$. Azaz egy k hosszú ciklus $k-1$ darab transzpozíció szorzata. Használjuk föl, hogy $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. □

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 4.1 és 4.2 szakaszait.
A 4.2.9. Lemma bizonyítását csak középszinten, továbbá a matematikus, alkmatos és tanári szakirányokon kell tudni.