1. Kristályok szimmetriái

Háromszög-szimmetria.



Rubin *Zafir* *Kalcit*

aluminium-oxid: Al_2O_3 kalcium-karbonát: $CaCO_3$



Hematit *Ametiszt* *Kvarc*

vasoxid: Fe_2O_3 szilicium-dioxid: SiO_2

Hatszög-szimmetria.

Berill (berillium–aluminium-szilikát): $Be_3Al_2(SiO_3)_6$
Egy szimmetriatengely körüli 60°-os elforgatás.



Vörös berill *Smaragd* *Akvamarin*

Kocka–oktaéder-szimmetria.

Összesen 48 szimmetria.

Galenit
ólom-szulfid: PbS

Gyémánt
szén: C

Fluorit
kalcium-fluorid: CaF_2

2. Szimmetriák a fizikában

A bolygómozgás szimmetriája.

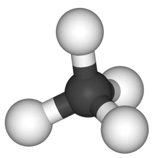
Kiss-jegyzet, C.5.2. Példa
A bolygók keringése során a bolygó *energiája*, *perdületének* nagysága és iránya nem változik a mozgás során. A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus. Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus, azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

Kiss-jegyzet, C.5.4. Tétel
Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei (lendület, energia, perdület) között.

Színképvonalak felhasadása.

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

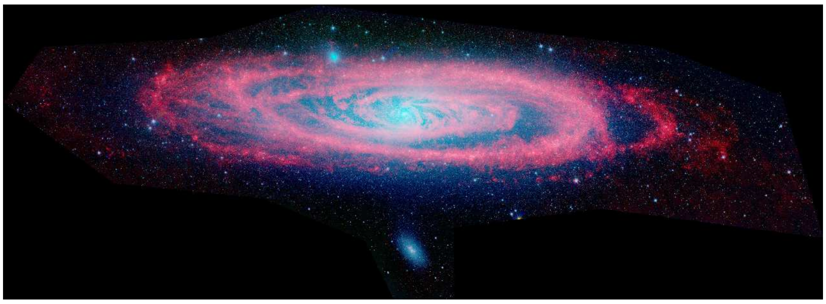
Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).



Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat két vagy három komponensre bontja szét. Oka: mágneses térben *megszűnnek egyes szimmetriák*.
Matematikai apparátus: a szimmetriák csoportján alapul.

Lorentz-transzformációk.

A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit a *Lorentz-transzformációk* adják meg.



Lásd Kiss-jegyzet, 4.1. és C.6. szakasz. A C.7. szakaszban az Androméda-ködbe is elutazunk. A fenti kép az infravörös tartományban készült.

3. Matematikai alkalmazások

Kártyakeverés.

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot. HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel
Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag *jól megkeveredik*, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek (csak ki lehessen keverni belőlük minden sorrendet). Bizonyítás: ugyanaz az apparátus, mint a metánmolekulánál.

Csoportok a geometriában.

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872). Általános vezérlő elv: milyen *szimmetriák* érvényesek. A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Projektív geometriában az egyenestartó transzformációk. Ilyen például a vetítés (fényképzés, panorámaképek illesztése).

Számelméleti alkalmazások.

Binom kongruenciák
Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím). Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható. Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele
Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)
Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;
- csoportkarakterek véges kommutatív csoportokra.

Szalay Mihály: Számelmélet (középiskolai tagozatos tankönyv).

További alkalmazások.

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).

A csoportelmélet rendkívül mély! A *véges egyszerű csoportok osztályozásának* bizonyítása több, mint *tízezer* oldal! Rengeteg alkalmazása van például a kombinatorikában, az algoritmuselméletben.