1. A Jordan-féle normálalak

Nem diagonalizálható mátrixok.

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el. *Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?*

Példa

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nincs sajátvektorokból álló bázis, M nem diagonalizálható.

Szebb alak.

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Ez nem diagonális, de *tudjuk hatványozni!*

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:

$M^k = \begin{bmatrix} 2^k - 2k2^{k-1} & -4k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + 2k2^{k-1} \end{bmatrix}.$

Jordan-blokk.

Definíció
Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó *Jordan-blokk*:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, közvetlenül alatta ferdén 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk az előző félévben
N^j a főátló alatti j-edik sorban ferdén 1, másutt 0. Speciálisan $N^j = 0$, ha $j \geq m$.

Jordan-normálalak.

Definíció
Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix *Jordan-alakú*, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan tétele.

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)
Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix bázistranszformációval Jordan-alakra hozható. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban *egyértelmű*: csak a blokkok sorrendje változhat. Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Bizonyítás: a következő félévben, de nem minden szakirányon. Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma. A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist. Az eljárásból a minimálpolinomot is megkapjuk. *Haszna:* van képlet a Jordan-alak hatványozására.

Diagonális blokkmátrix hatványozása.

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A Jordan-alak hatványozása.

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll; a főátló alatti j-edik ferde sor végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE *felcserélhető*, mert $N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \dots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \dots$. Használjuk föl N^j ismert szerkezetét. $\square$

2. A diagonalizálhatóság feltétele

Diagonalizálható transzformációk.

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan *ortonormált* bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából *mindegy*, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az.

Diagonalizálható mátrixok.
Legyen T test és $M \in T^{n \times n}$.

Tétel (Freud, 6.6.1. Feladat)
Pontosan akkor diagonalizálható M egy $T^{n \times n}$-beli mátrixszal, ha M minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (Freud, 8.6.2. Tétel)
Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor diagonalizálható M *ortonormált* bázisban, vagyis egy $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli *ortogonális* mátrixszal, ha M szimmetrikus.

$\mathbb{C}$ fölött is értelmezhető a skaláris szorzat és az ortonormált bázis fogalma.
Az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölötti *ortonormált* bázisban, ha $MM^T = M^T M$. Lásd Freud, 8.5. szakasz.

Hasonlóság.

Definíció
Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N *hasonló*, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás
Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra. Hasonló transzformációknak egyenlő a karakterisztikus polinomja, a minimálpolinomja és a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás
Az első állítás a bázistranszformáció képletéből adódik.
A második igaz, mert ha $M = [A]$, akkor $k_M = k_A$ és $m_M = m_A$.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása.

Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei). Ha N hasonló M-hez, akkor minimálpolinomjuk ugyanaz. Ezért a diagonalizálható mátrixok minimálpolinomjára teljesülnek a tétel feltételei.

A megfordítás kulcsa a következő állítás.

Állítás (Freud, 6.6.2. Tétel)
Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $m_A = gh$, ahol g és h relatív prím polinomok.
Ekkor $V = \mathrm{Ker}\, g(A) \oplus \mathrm{Ker}\, h(A)$.

Ezzel a lineáris algebra efélévi részét elvégeztük. Az anyagot lefedi a Freud-könyv első nyolc fejezete, de az utolsó két fejezetet csak éppen hogy érintettük. Haladóknak kiegészítés a Kiss-jegyzet 7.6. szakasza.