1. Bevezetés

A félév anyaga.

- *Lineáris algebra*
  - Vektorterek, alterek
  - Függés, függetlenség, bázis, dimenzió
  - Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge
  - Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
  - Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
  - Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
  - Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- *Csoportelmélet*
  - Példák: permutációk, mátrixok, geometriai transzformációk
  - Részcsoport, mellékosztály, Lagrange tétele
  - Elemrend, ciklikus csoportok, generált részcsoport
  - Permutációcsoportok, pálya és stabilizátor
  - Izomorfizmus, homomorfizmus, normálosztó, faktorcsoport
  - Egyszerű csoportok, Feit–Thompson-tétel, klasszifikáció
  - Direkt szorzat, véges Abel-csoportok

Irodalom.

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- *Freud Róbert: Lineáris algebra*
  - A mostani és a következő félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- *Kiss Emil: Bevezetés az algebrába* (remélhetőleg a félév közben megjelenik)
  - A csoportelméleti anyagrész
  - A későbbi félévek anyaga
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- *További feladatgyűjtemény*
  - Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok

A számonkérés módja.

- *A gyakorlati jegy:*
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
    Kötelező számítógépes házi feladat.
  - Két évfolyamzárthelyi: $40 - 40\%$;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- *A vizsgajegy:*
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri;
  - Összesen három alkalom; egyre kell eljönni, kivéve ha az nem sikerül.

A zárthelyik.

- Első zárthelyi
  - Március 23, péntek, 14:00-16:00,
  - északi tömb, -1.75 Konferenciaterem és 0.81 Ortvay-terem.
  - Cserébe elmarad az utolsó héten az előadás (május 15).
- Második zárthelyi
  - Május 9, szerda, 16:00-18:00,
  - déli tömb, 0-821 Bolyai János és 0-803 SzabóJózsef terem.
  - Cserébe elmaradnak az utolsó heti gyakorlatok (május 14–18).
- Javító zárthelyi
  - Május 21, hétfő, 9:00-12:00,
  - déli tömb, 0-822 Mogyoródi József terem.
- Gyakorlati jegy utóvizsga
  - Május 24, csütörtök, 9:00-11:00,
  - déli tömb, 0-803 Szabó József terem.

Szintválasztás.

- *Csak az első tanítási hét végéig váltható szint!*
  - Hármasnál kisebb algebra átlaggal alapszint,
  - legalább négyes algebra átlaggal középszint javasolt.
  - Alapszinten: fogalmak, tételek, eljárások megértése.
  - Középszinten: absztrakt fogalmak, bizonyítások is.
  - A középszintű anyag részletei kellenek
    - matematikus
    - alkalmazott matematikus
    - matematika tanári szakirányon.
  - Aki alapszintre jár, de ezekre a szakirányokra készül, az kövesse a középszintű anyagrészeket is a két ajánlott tankönyv segítségével.
- A számonkérés közös lesz alap- és középszinten.
- Másodévtől már nincsenek szintek.

2. Vektortér

Oszlopvektorok.

Definíció
Legyen T test. A T fölötti n magasságú *oszlopvektorok* az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n.

Definíció
Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az *összeadást* és a λ *skalárral szorzást.* Azaz összeadni és skalárral szorozni *komponensenként* kell.

Az összeadás tulajdonságai.

Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a *nullvektor*).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u *ellentettje*).

A *nullvektor* $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az *ellentett*: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$
(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A skalárral szorzás tulajdonságai.

Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n\times m}$-beli mátrixok.
- A $T[x]$ polinomjai.
- Valós függvények, egyenletek.

Mind összeadhatók és (a megfelelő) skalárokkal szorozhatók.

A vektortér fogalma.

Definíció
T test (elemei a *skalárok*), V halmaz (elemei a *vektorok*). V *vektortér* T fölött, ha értelmezett a V-beli + összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (*LÉTEZIK* 0 *nullvektor*).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (*LÉTEZIK* $-u$, az u *ellentettje*).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

Elemi következmények.

Tétel (Freud, 4.1.2. Tétel)
Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

(1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.

(2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.

(3) Minden v vektorra $0v = 0$ (itt 0 a nulla skalár).

(4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)**-re**
Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1}.
Így $0 = \lambda^{-1} 0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$. □

A fenti (4) miatt.
A (7) vektortéraxióma miatt.
A (8) vektortéraxióma miatt.

3. Altér

Az altér fogalma.

Definíció
Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz *altér*, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai $\mathbb{R}$ fölött. W az x-tengellyel párhuzamos vektorok.

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ fölött. W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények $\mathbb{R}$ fölött. W a folytonos függvények.

(4) V a kétszer kettes komplex mátrixok $\mathbb{C}$ fölött. W a felső háromszögmátrixok.

Az altér jellemzése.

Tétel (Freud, 4.2.2. Tétel)
Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) *W zárt az összeadásra*, azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) *W zárt a skalárral szorzásra*, azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Állítás (Freud, 4.2.15. és 4.2.12. Feladat)

(1) Az altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Alterek metszete is altér.

(3) Két altér uniója *csak akkor* altér, ha valamelyikük tartalmazza a másikat.

Altér készítése.

Kérdés
Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre. Ezek pont a v-vel párhuzamos vektorok (egy egyenes).

Kérdés
Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Az $ax + bx^2$ alakú polinomok már alteret alkotnak ($a, b \in \mathbb{R}$).

Generált altér.

Tétel (Freud, 4.3.4. Tétel)
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.
Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V-ben. Ez a $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ által *generált altér*, jele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$.

Bizonyítás
$U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_m \in U$.
Ha $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$,
mert $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_m)v_m$. Így U skalárszorosra zárt.
Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF. $\square$

$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ a *legszűkebb* $v_1, \ldots, v_m$-et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \ldots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq W$.