BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

Második zárthelyi (2007. május 9.) — eredmények („17-szög" változat)

1. a) $H = \{id, (234), (243)\}$ (1 pont). Az $(143)id$, $(143)(234)$, $(143)(243)$ az 2-t rendre 2-be, 1-be, 3-ba viszi (2 pont, hibánként 1 pont levonás).
b) $(153)(24)$ (2 pont), előjel $1 \cdot -1 = -1$, azaz páratlan permutáció (1 pont).

2. a) $f^3tft = f^3ttf^5 = f^8 = f^2$ (2 pont), rendje 3 (1 pont).
b) $\mathbb{Z}_{32}^{\times}$ rendje $\varphi(32) = 16$, ezért 13 rendje csak $1, 2, 4, 8, 16$ lehet (1 pont). Ismételt négyzetre emeléssel $13^2 = 9$, $13^4 = 17$, $13^8 = 1$ (1 pont). Ezért a rend 8 (1 pont). A teljes megoldáshoz mindenképpen (akár az összes hatvány kiszámításával) meg kell indokolni, hogy a 8-nál nincs kisebb jó kitevő, ez a rész ér 2 pontot. (Tanulság: aki nem alkalmazza a tételeket, hosszas számításokra kényszerülhet.)

3. Jelölje H az S_4-ben a 3 stabilizátorát. Ebben mindkét megadott elem benne van, és ezért a generált $K = \langle (124), (14) \rangle$ részcsoport H-nak része lesz (3 pont). Mivel (124) rendje 3 és (14) rendje 2, ezért K rendje osztható 2-vel és 3-mal is, tehát 6-tal is, és így csak maga H lehet (3 pont).

4. Jelölje $ABCD$ és $ABEF$ a két gúla alaplapját (itt B, C, E, illetve A, D, F vannak a kocka egy-egy lapján). Ekkor A pályája $\{A, B\}$ (1 pont), ezért a keresett G csoport rendje $2|H|$, ahol H az A stabilizátora (1 pont). Ha A fix, akkor D pályája $\{D, F\}$ (1 pont), ezért H rendje $2|K|$, ahol K az A-t és D-t fixáló transzformációk részcsoportja (1 pont). Egy ilyen transzformáció már minden csúcsot fixál (1 pont), és ezért G rendje $2 \cdot 2 = 4$ (1 pont).

5. A Burnside-lemmát alkalmazzuk. Az identitásnak $\binom{17}{3} = 680$ fixpontja van (1 pont). Forgatásnak nincs fixpontja, mert semelyik háromszögnek nincs $k360°/17$ szögű forgásszimmetriája, ha $1 \leq k < 17$ (2 pont). Egy tengelyes tükrözésnek $(17-1)/2 = 8$ fixpontja van (2 pont). Ezért az eredmény $(680 + 17 * 8)/34 = 24$ (1 pont). Sokkal kényelmesebb 17 helyett egy általános $p > 3$ prímmel számolni, akkor az eredmény $(p^2 - 1)/12$.

6. D_{17}-tel nincs, mert annak rendje $2 \cdot 17$, és 17 nem osztója $|S_{16}| = 16!$-nak (3 pont). Viszont D_{16} elemei a csúcsok 16 elemű halmazán ható permutációknak tekinthetők, és ezek S_{16}-nak egy D_{16}-tal izomorf részcsoportját alkotják (3 pont).