BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

Második zárthelyi (2007. május 9.) — eredmények („29-szög" változat)

1. a) $H = \{id, (123), (132)\}$ (1 pont). Az $(143)id$, $(143)(123)$, $(143)(132)$ az 1-et rendre 4-be, 2-be, 1-be viszi (2 pont, hibánként 1 pont levonás).
b) $(12)(345)$ (2 pont), előjel $-1 \cdot 1 = -1$, azaz páratlan permutáció (1 pont).

2. a) $f^2tf^3t = f^2ttf^3 = f^5$ (2 pont), rendje 6 (1 pont).
b) $\mathbb{Z}_{32}^{\times}$ rendje $\varphi(32) = 16$, ezért 11 rendje csak $1, 2, 4, 8, 16$ lehet (1 pont). Ismételt négyzetre emeléssel $11^2 = 25$, $11^4 = 17$, $11^8 = 1$ (1 pont). Ezért a rend 8 (1 pont). A teljes megoldáshoz mindenképpen (akár az összes hatvány kiszámításával) meg kell indokolni, hogy a 8-nál nincs kisebb jó kitevő, ez a rész ér 2 pontot. (Tanulság: aki nem alkalmazza a tételeket, hosszas számításokra kényszerülhet.)

3. Jelölje H az S_4-ben a 4 stabilizátorát. Ebben mindkét megadott elem benne van, és ezért a generált $K = \langle(123), (31)\rangle$ részcsoport H-nak része lesz (3 pont). Mivel (123) rendje 3 és (31) rendje 2, ezért K rendje osztható 2-vel és 3-mal is, tehát 6-tal is, és így csak maga H lehet (3 pont).

4. Jelölje A azt a csúcsot, amely körüli lapokra a gúlákat ragasztjuk, B, C, D pedig a kocka A-val szomszédos csúcsait. Ekkor B pályája $\{B, C, D\}$ (1 pont), ezért a keresett G csoport rendje $3|H|$, ahol H a B stabilizátora (1 pont). Ha B fix, akkor C pályája $\{C, D\}$ (1 pont), ezért H rendje $2|K|$, ahol K a B-t és C-t fixáló transzformációk részcsoportja (1 pont). Egy ilyen transzformáció már minden csúcsot fixál (1 pont), és ezért G rendje $3 \cdot 2 = 6$ (1 pont).

5. A Burnside-lemmát alkalmazzuk. Az identitásnak $\binom{29}{3} = 3654$ fixpontja van (1 pont). Forgatásnak nincs fixpontja, mert semelyik háromszögnek nincs $k360°/29$ szögű forgásszimmetriája, ha $1 \leq k < 29$ (2 pont). Egy tengelyes tükrözésnek $(29-1)/2 = 14$ fixpontja van (2 pont). Ezért az eredmény $(3654 + 29 * 14)/58 = 70$ (1 pont). Sokkal kényelmesebb 29 helyett egy általános $p > 3$ prímmel számolni, akkor az eredmény $(p^2 - 1)/12$.

6. D_{11}-gyel nincs, mert annak rendje $2 \cdot 11$, és 11 nem osztója $|S_{10}| = 10!$-nak (3 pont). Viszont D_{10} elemei a csúcsok 10 elemű halmazán ható permutációknak tekinthetők, és ezek S_{10}-nek egy D_{10}-zel izomorf részcsoportját alkotják (3 pont).