BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

Második zárthelyi (2007. május 9.) — eredmények („19-szög” változat)

1. a) $H = \{id, (124), (142)\}$ (1 pont). Az $(143)id$, $(143)(124)$, $(143)(142)$ az 1-et rendre 4-be, 2-be, 3-ba viszi (2 pont, hibánként 1 pont levonás).
b) $(12)(354)$ (2 pont), előjel $-1 \cdot 1 = -1$, azaz páratlan permutáció (1 pont).

2. a) $f^2tft = f^2ttf^5 = f^7 = f$ (2 pont), rendje 6 (1 pont).
b) $\mathbb{Z}_{64}^{\times}$ rendje $\varphi(64) = 32$, ezért 5 rendje csak $1, 2, 4, 8, 16, 32$ lehet (1 pont). Ismételt négyzetre emeléssel $5^2 = 25$, $5^4 = 49$, $5^8 = 33$, $5^{16} = 1$ (1 pont). Ezért a rend 16 (1 pont). A teljes megoldáshoz mindenképpen (akár az összes hatvány kiszámításával) meg kell indokolni, hogy a 16-nál nincs kisebb jó kitevő, ez a rész ér 2 pontot. (Tanulság: aki nem alkalmazza a tételeket, hosszas számításokra kényszerülhet.)

3. Jelölje H az S_4-ben az 1 stabilizátorát. Ebben mindkét megadott elem benne van, és ezért a generált $K = \langle (342), (24) \rangle$ részcsoport H-nak része lesz (3 pont). Mivel (342) rendje 3 és (24) rendje 2, ezért K rendje osztható 2-vel és 3-mal is, tehát 6-tal is, és így csak maga H lehet (3 pont).

4. Jelölje $ABCD$ az egyik olyan lapot, amire nem ragasztottunk gúlát. Ekkor A minden csúcsba elvihető (1 pont), ezért a keresett G csoport rendje $8|H|$, ahol H az A stabilizátora (1 pont). Ha A fix, akkor B pályája $\{B, D\}$ (1 pont), ezért H rendje $2|K|$, ahol K az A-t és B-t fixáló transzformációk részcsoportja (1 pont). Egy ilyen transzformáció már minden csúcsot fixál (1 pont), és ezért G rendje $8 \cdot 2 = 16$ (1 pont).

5. A Burnside-lemmát alkalmazzuk. Az identitásnak $\binom{19}{3} = 969$ fixpontja van (1 pont). Forgatásnak nincs fixpontja, mert semelyik háromszögnek nincs $k360°/19$ szögű forgásszimmetriája, ha $1 \leq k < 19$ (2 pont). Egy tengelyes tükrözésnek $(19-1)/2 = 9$ fixpontja van (2 pont). Ezért az eredmény $(969 + 19 * 9)/38 = 30$ (1 pont). Sokkal kényelmesebb 19 helyett egy általános $p > 3$ prímmel számolni, akkor az eredmény $(p^2 - 1)/12$.

6. D_{13}-mal nincs, mert annak rendje $2 \cdot 13$, és 13 nem osztója $|S_{12}| = 12!$-nak (3 pont). Viszont D_{12} elemei a csúcsok 12 elemű halmazán ható permutációknak tekinthetők, és ezek S_{12}-nek egy D_{12}-vel izomorf részcsoportját alkotják (3 pont).