

BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2007. március 23.) — eredmények (1492-es változat)

1. a) Ha $0 = \lambda_1(v_1 + v_3) + \lambda_2(v_1 - v_2) + \lambda_3v_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)v_1 - \lambda_2v_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)v_3$, akkor v_1, v_2, v_3 függetlensége miatt mindhárom együttható nulla (nem osztható 2 pont), így $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, tehát függetlenek (1 pont).

b) Hosszuk $\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}$, illetve $\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ (1 pont), skaláris szorzatuk pedig $1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = -3$ (1 pont), ezért $\cos \varphi = -3/(\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}) = -1/2$, azaz a szög 120° (1 pont).

2. a) Ha $x - 1 = \alpha(x^2 + 1) + \beta(x^3 - 1) + \gamma x$, akkor rendre 1, x , x^2 és x^3 együtthatóját felírva $\alpha - \beta = -1$, $\gamma = 1$, $\alpha = 0$ és $\beta = 0$ (nem osztható 2 pont). Ez ellentmondásos egyenletrendszer, ezért a válasz nemleges (1 pont).

b) A dimenzió 3 (ez indoklás nélkül is 1 pont), mert valódi altér a 4-dimenziós $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -ben, de $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & -1 \end{bmatrix}$ független (1 pont). Ez generátorrendszer is, mert független, és annyi elemű, mint a dimenzió (1 pont).

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \end{bmatrix}$, mert $(2 - i)^2 = 3 - 4i$ és $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ (3 pont).

b) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ (1 pont), $S^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (1 pont), $S^{-1}[A]S = \begin{bmatrix} 32 & 76 \\ -13 & -31 \end{bmatrix}$ (1 pont).

4. A karakterisztikus polinom $x^2(2-x)$ (1 pont), a sajátértékek 0 és 2 (1 pont). A megfelelő sajátvektorok $[1 \ 2 \ 2]^T$, illetve $[1 \ 1 \ 1]^T$ skalárszorosai (1 + 1 pont). A minimálpolinomnak gyöke 0 és 2, de $x(x-2)$ -nek az eredeti mátrix nem gyöke, ezért a minimálpolinom $x^2(x-2)$ (1 pont). A mátrix nem diagonalizálható, mert a minimálpolinomnak van kétszeres gyöke, vagy mert csak két független sajátvektor van, és így nincs sajátvektorokból álló bázis (1 pont).

5. A dimenziótétel miatt $\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = 2000$ (1 pont), és így $\dim \operatorname{Im} A = 1746$ és $\dim \operatorname{Ker} A = 254$ (1 pont). A dimenziótétel miatt elég tehát olyan transzformációt találni, melyre $\dim \operatorname{Ker} A = 254$, mert akkor a dimenziótétel miatt $\dim \operatorname{Im} A = 1746$ (1 pont). Ez következik a III/3-as feladat állításából: vegyünk egy bázist V -ben, az első 254 bázisvektort képezzük nullába, a többi önmagába, és alkalmazzuk az előírhatósági tételt (3 pont, akkor is, ha valaki csak hivatkozik a feladatsorra).

6. Mivel $V = V_1 \oplus V_3$, ezért $\dim V_1 + \dim V_3 = \dim V$ (3 pont). Hasonlóan kapjuk, hogy $\dim V_2 + \dim V_3 = \dim V$ (1 pont), ahonnan $\dim V_2 = \dim V_1 = 25$ (2 pont). A konstrukció: legyen b_1, \dots, b_{50} bázis egy V vektortérben, $V_1 = \langle b_1, \dots, b_{25} \rangle$, $V_2 = \langle b_{26}, \dots, b_{50} \rangle$ és végül $V_3 = \langle b_1 + b_{26}, b_2 + b_{27}, \dots, b_{25} + b_{50} \rangle$ (3 pont).