BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2007. március 23.) — eredmények (1222-es változat)

1. a) Ha $0 = \lambda_1(v_1 + v_3) + \lambda_2(v_2 - v_1) + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)v_1 + \lambda_2 v_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)v_3$, akkor v_1, v_2, v_3 függetlensége miatt mindhárom együttható nulla (nem osztható 2 pont), így $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, tehát függetlenek (1 pont).
b) Hosszuk $\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}$, illetve $\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}$ (1 pont), skaláris szorzatuk pedig $1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 9$ (1 pont), ezért $\cos\varphi = 9/(\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}) = 1/2$, azaz a szög $60°$ (1 pont).

2. a) Ha $x + 1 = \alpha(x^2 - 1) + \beta(x^3 - 1) + \gamma x$, akkor rendre 1, x, x^2 és x^3 együtthatóját felírva $\alpha + \beta = -1$, $\gamma = 1$, $\alpha = 0$ és $\beta = 0$ (nem osztható 2 pont). Ez ellentmondásos egyenletrendszer, ezért a válasz nemleges (1 pont).
b) A dimenzió 3 (ez indoklás nélkül is 1 pont), mert valódi altér a 4-dimenziós $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben, de $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & -1 \end{bmatrix}$ független (1 pont). Ez generátorrendszer is, mert független, és annyi elemű, mint a dimenzió (1 pont).

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}$, mert $(2 + i)^2 = 3 + 4i$ és $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ (3 pont).
b) $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (1 pont), $S^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (1 pont), $S^{-1}[A]S = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (1 pont).

4. A karakterisztikus polinom $x^2(-1-x)$ (1 pont), a sajátértékek 0 és -1 (1 pont). A megfelelő sajátvektorok $[1 \quad 2 \quad 2]^T$, illetve $[1 \quad 1 \quad 1]^T$ skalárszorosai (1 + 1 pont). A minimálpolinomnak gyöke 0 és -1, de $x(x + 1)$-nek az eredeti mátrix nem gyöke, ezért a minimálpolinom $x^2(x + 1)$ (1 pont). A mátrix nem diagonalizálható, mert a minimálpolinomnak van kétszeres gyöke, vagy mert csak két független sajátvektor van, és így nincs sajátvektorokból álló bázis (1 pont).

5. A dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Im} A + \dim \mathrm{Ker} A = 2000$ (1 pont), és így $\dim \mathrm{Im} A = 1611$ és $\dim \mathrm{Ker} A = 389$ (1 pont). A dimenziótétel miatt elég tehát olyan transzformációt találni, melyre $\dim \mathrm{Ker} A = 389$, mert akkor a dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Im} A = 1611$ (1 pont). Ez következik a III/3-as feladat állításából: vegyünk egy bázist V-ben, az első 389 bázisvektort képezzük nullába, a többit önmagába, és alkalmazzuk az előírhatósági tételt (3 pont, akkor is, ha valaki csak hivatkozik a feladatsorra).

6. Mivel $V = V_1 \oplus V_3$, ezért $\dim V_1 + \dim V_3 = \dim V$ (3 pont). Hasonlóan kapjuk, hogy $\dim V_2 + \dim V_3 = \dim V$ (1 pont), ahonnan $\dim V_2 = \dim V_1 = 21$ (2 pont). A konstrukció: legyen $b_1, \ldots, b_{42}$ bázis egy V vektortérben, $V_1 = \langle b_1, \ldots, b_{21} \rangle$, $V_2 = \langle b_{22}, \ldots, b_{42} \rangle$ és végül $V_3 = \langle b_1 + b_{22}, b_2 + b_{23}, \ldots, b_{21} + b_{42} \rangle$ (3 pont).