BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2007. március 23.) — eredmények (1956-os változat)

1. a) Ha $0 = \lambda_1(v_1 - v_2) + \lambda_2(v_2 + v_3) + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 v_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)v_3$, akkor v_1, v_2, v_3 függetlensége miatt mindhárom együttható nulla (nem osztható 2 pont), így $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, tehát függetlenek (1 pont).
b) Hosszuk $\sqrt{1^2+1^2+4^2} = \sqrt{18}$, illetve $\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2} = 3$ (1 pont), skaláris szorzatuk pedig $1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 4\cdot(-2) = -9$ (1 pont), ezért $\cos\varphi = -9/(3\cdot\sqrt{18}) = -1/\sqrt{2}$, azaz a szög $135°$ (1 pont).

2. a) Ha $x - 1 = \alpha(x^2+1) + \beta(x^3+1) + \gamma x$, akkor rendre 1, x, x^2 és x^3 együtthatóját felírva $\alpha + \beta = -1$, $\gamma = 1$, $\alpha = 0$ és $\beta = 0$ (nem osztható 2 pont). Ez ellentmondásos egyenletrendszer, ezért a válasz nemleges (1 pont).
b) A dimenzió 3 (ez indoklás nélkül is 1 pont), mert valódi altér a 4-dimenziós $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben, de $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ független (1 pont). Ez generátorrendszer is, mert független, és annyi elemű, mint a dimenzió (1 pont).

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, mert $(1-i)^2 = -2i$ és $(1-i)^3 = -2i - 2$ (3 pont).
b) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (1 pont), $S^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (1 pont), $S^{-1}[A]S = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (1 pont).

4. A karakterisztikus polinom $x^2(2-x)$ (1 pont), a sajátértékek 0 és 2 (1 pont). A megfelelő sajátvektorok $[2 \quad 4 \quad 1]^T$, illetve $[0 \quad 0 \quad 1]^T$ skalárszorosai $(1+1$ pont). A minimálpolinomnak gyöke 0 és 2, de $x(x-2)$-nek az eredeti mátrix nem gyöke, ezért a minimálpolinom $x^2(x-2)$ (1 pont). A mátrix nem diagonalizálható, mert a minimálpolinomnak van kétszeres gyöke, vagy mert csak két független sajátvektor van, és így nincs sajátvektorokból álló bázis (1 pont).

5. A dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Im} A + \dim \mathrm{Ker} A = 2000$ (1 pont), és így $\dim \mathrm{Im} A = 1978$ és $\dim \mathrm{Ker} A = 22$ (1 pont). A dimenziótétel miatt elég tehát olyan transzformációt találni, melyre $\dim \mathrm{Ker} A = 22$, mert akkor a dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Im} A = 1978$ (1 pont). Ez következik a III/3-as feladat állításából: vegyünk egy bázist V-ben, az első 22 bázisvektort képezzük nullába, a többit önmagába, és alkalmazzuk az előírhatósági tételt (3 pont, akkor is, ha valaki csak hivatkozik a feladatsorra).

6. Mivel $V = V_1 \oplus V_3$, ezért $\dim V_1 + \dim V_3 = \dim V$ (3 pont). Hasonlóan kapjuk, hogy $\dim V_2 + \dim V_3 = \dim V$ (1 pont), ahonnan $\dim V_2 = \dim V_1 = 22$ (2 pont). A konstrukció: legyen $b_1, \ldots, b_{44}$ bázis egy V vektortérben, $V_1 = \langle b_1, \ldots, b_{22} \rangle$, $V_2 = \langle b_{23}, \ldots, b_{44} \rangle$ és végül $V_3 = \langle b_1 + b_{23}, b_2 + b_{24}, \ldots, b_{22} + b_{44} \rangle$ (3 pont).