

## BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

*Első zárthelyi (2007. március 23.)*

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a pusztán eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. Az alábbiakat **NYOMTATOTT BETŰVEL**, illetve **KARIKÁZVA** töltsétek ki.

Név: \_\_\_\_\_ ELTE azonosító: \_\_\_\_\_

Gyakorlatvezető: Ágoston Hegedűs Hermann Kiss Pluhár Szabó  
A gyakorlat időpontja: H12 K8 K10 K16 Sz8 Cs10

1. (3+3 pont)

a) Ha  $v_1, v_2, v_3$  lineárisan független  $\mathbb{Q}$  fölött, akkor  $v_1 + v_3, v_1 - v_2, v_3$  független-e?

b) Határozzuk meg a térben az  $(1, 1, 4)$  és a  $(1, 0, -1)$  pontokhoz tartozó helyvektorok szögét.

**2.** (3+3 pont)

a) Igaz-e, hogy  $x - 1 \in \langle x^2 + 1, x^3 - 1, x \rangle$ ?

b) Álljon a  $W \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$  altér azokból az  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  mátrixokból, melyekre  $a - b = c - id$ . Adjuk meg  $W$  dimenzióját  $\mathbb{C}$  fölött, és egy bázist is.

**3.** (3+3 pont)

- a) Álljon  $V$  az  $\mathbb{R}[x]$  legfeljebb harmadfokú polinomjaiból és a nullapolinomból, legyen  $W = \mathbb{C}$  mint  $\mathbb{R}$  fölötti vektortér, és  $A(f) = f(2 - i)$ . Írjuk föl  $A$  mátrixát a szokásos bázispárban.

- b) A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Mi lesz a mátrixa az  $(1, 3), (2, 7)$  bázisban?

4. Határozzuk meg a  $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 4 & -6 & 4 \\ 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$  mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, minimálpolinomját, és döntsük el, hogy diagonalizálható-e.

**Az utolsó két feladatot külön papíron dolgozzátok ki.**

5. Adjunk meg egy olyan  $A$  lineáris transzformációt egy 2000-dimenziós téren, melyre  $\dim \operatorname{Im} A - \dim \operatorname{Ker} A = 1492$ .

6. A véges dimenziós  $V$  vektortérben  $V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3 = V_2 \oplus V_3$  teljesül a  $V_1, V_2, V_3$  alterekre. Ha  $\dim V_2 = 25$ , akkor mennyi  $\dim V_1$ ? Extra 3 pontért adjunk példát ilyen alterekre.