

BSc algebra2 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2007. március 23.)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a pusztán eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. Az alábbiakat **NYOMTATOTT BETŰVEL**, illetve **KARIKÁZVA** töltsétek ki.

Név: _____ ELTE azonosító: _____

Gyakorlatvezető: Ágoston Hegedűs Hermann Kiss Pluhár Szabó
A gyakorlat időpontja: H12 K8 K10 K16 Sz8 Cs10

1. (3+3 pont)

a) Ha v_1, v_2, v_3 lineárisan független \mathbb{Q} fölött, akkor $v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_3$ független-e?

b) Határozzuk meg a térben az $(1, 1, 4)$ és a $(2, -1, 2)$ pontokhoz tartozó helyvektorok szögét.

2. (3+3 pont)

a) Igaz-e, hogy $x - 1 \in \langle x^2 - 1, x^3 - 1, x \rangle$?

b) Álljon a $W \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$ altér azokból az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixokból, melyekre $a + b = c + id$. Adjuk meg W dimenzióját \mathbb{C} fölött, és egy bázist is.

3. (3+3 pont)

- a) Álljon V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjaiból és a nullapolinomból, legyen $W = \mathbb{C}$ mint \mathbb{R} fölötti vektortér, és $A(f) = f(1 + i)$. Írjuk föl A mátrixát a szokásos bázispárban.

- b) A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Mi lesz a mátrixa az $(1, 2), (3, 5)$ bázisban?

4. Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, minimálpolinomját, és döntsük el, hogy diagonalizálható-e.

Az utolsó két feladatot külön papíron dolgozzátok ki.

5. Adjunk meg egy olyan A lineáris transzformációt egy 2000-dimenziós téren, melyre $\dim \operatorname{Im} A - \dim \operatorname{Ker} A = 1848$.
6. A véges dimenziós V vektortérben $V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3 = V_2 \oplus V_3$ teljesül a V_1, V_2, V_3 alterekre. Ha $\dim V_2 = 23$, akkor mennyi $\dim V_1$? Extra 3 pontért adjunk példát ilyen alterekre.