BSc Algebra2, vizsgatematika (2007 tavasza)

A vizsga anyaga kis kivételekkel Freud Róbert: *Lineáris algebra* könyvének negyedik, ötödik és hatodik fejezete, továbbá Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába* című könyvéből a következő szakaszok: 2.2, 4.1–4.7, 4.9, 4.14. A tanuláshoz hasznosak a gyakorlatok feladatsorai is. Az elméleti anyag egyes részei a gyakorlaton szerepeltek. A skaláris szorzathoz a Freud-jegyzet nyolcadik fejezete ad segítséget. NB: a bizonyítást nem kell tudni.

A vizsga irásbeli, információk a `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/` címen találhatók (például a konzultációkról), egy minta vizsgadolgozat is letölthető. A vizsga első felében egy óra alatt 30 könnyű kérdésre kell válaszolni, ezek a fogalmak, tételek, bizonyítások megértését vizsgálják. Aki itt elér legalább 50%-ot, annak a vizsgája már sikeres, a többieké sajnos elégtelen. A vizsga második felében harminc perc alatt 5 kérdésre kell válaszolni az anyag nehezebb részeiből. A vizsgán csak toll és üres papír használható.

Vektorterek. A vektortéraxiómák, elemi tulajdonságok, példák. Az altér fogalma és jellemzése a műveletekre való zártság segítségével. A generált altér mint lineáris kombinációk halmaza, és mint adott elemeket tartalmazó legszűkebb altér; generátorrendszer. Lineáris függés és függetlenség, kapcsolatuk. A bázis fogalma, jellemzése, mint minimális generátorrendszer, illetve maximális független rendszer. Vektor koordinátái adott bázisban. A skaláris szorzat fogalma $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza és szöge. Ortonormált bázis. Vektor koordinátáinak felírása ortonormált bázisban a skaláris szorzat segítségével. A kicserélési tétel. Következmények: független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré, minden független rendszer kiegészíthető bázissá, a bázis elemszámának egyértelműsége. Valódi altér dimenziója. Alterek összege. Az összeg elemeinek előállítása mikor egyértelmű, direkt összeg, direkt kiegészítő altér létezése és dimenziója. Alterek összegének dimenziója. Ortogonális kiegészítő altér és ennek dimenziója valós fölött.

Lineáris leképezések. Lineáris leképezés, lineáris transzformáció. Műveletek, ezekre a lineáris leképezések vektorteret, a lineáris transzformációk gyűrűt alkotnak. Előírhatósági tétel, lineáris leképezés mátrixa adott bázispárban. Összefüggés a mátrixműveletek és a lineáris leképezések műveletei között. Két vektortér pontosan akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik. A lineáris leképezések vektorterének dimenziója. A bázistranszformáció képlete. Távolságtartó transzformációk. Bázistranszformáció ortonormált bázisok között. Képtér, magtér, az injektivitás és a szürjektivitás jellemzése. A dimenziótétel. Véges dimenziós téren az invertálható transzformációk jellemzése (van bal-, illetve jobbinverze, nem bal, illetve jobb oldali nullosztó, magja nulla, képe az egész tér, bijektív); e jellemzések átvitele mátrixokra. Véges dimenziós téren, ha AB az identitás, akkor BA is az. Lineáris transzformáció determinánsa, mint a mátrixának a determinánsa, ez nem függ a bázistól. A determináns geometriai jelentése. Az invertálhatóság és a determináns kapcsolata.

Vektorrendszer rangja, mint az általa generált altér dimenziója. A rang a maximális független részrendszerek elemszáma. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Mátrix oszloprangja, lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának a rangja. Két mátrix szorzatának rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja. Az oszloprang és a sorrang megegyezik, determinánsrang. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.

Sajátérték, minimálpolinom. Lineáris transzformáció, négyzetes mátrix diagonalizálhatósága, sajátértékei, sajátvektorai, sajátalterei, karakterisztikus polinomja; ennek gyökei a sajátértékek. Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek, így ha annyi különböző sajátérték van, mint a tér dimenziója, akkor a transzformáció diagonalizálható. Mátrix és transzformáció minimálpolinomja. Az A transzformáció m_A minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek A gyöke. A minimálpolinom egyértelmű, egy f polinomnak A pontosan akkor gyöke, ha $m_A \mid f$. A sajátértékek gyökei a minimálpolinomnak. A Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix illetve transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának (NB). Következmények: a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és így a foka legfeljebb a dimenzió; a minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek. A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége (NB), hatványozása. Egy transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinomja lineáris tényezőkre bomlik és minden gyöke egyszeres (csak részben bizonyítva). Főtengelytétel: egy valós mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban**, ha szimmetrikus (NB). Hasonló mátrixok.

Csoportok. A csoport fogalma. Gyűrű additív és multiplikatív csoportja, az általános lineáris csoport. A szimmetrikus és az alternáló csoport, ciklusfelbontás. A Klein-csoport, a diédercsoport és a kvaterniócsoport. Geometriai transzformációk csoportjai.

Hatványozás, elemrend, tulajdonságok, a hatvány rendje. Permutáció rendjének leolvasása a ciklusfelbontásról. Elemrend ciklikus csoportban. Részcsoport, jellemzése zártsággal és komplexusszorzással. Lagrange tétele, mellékosztály, index, a bal oldali és a jobb oldali mellékosztályok száma megegyezik. Egy elemmel generált részcsoport. Elem rendje osztója a csoport rendjének, következmény: Euler-Fermat-tétel. Egy csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja, ha prímrendű. Prímrendű csoport ciklikus. Ciklikus csoport részcsoportja is ciklikus. A ciklikus csoportok részcsoportjainak leírása. Generált részcsoport, példák. A generált részcsoport elemeinek leírása (NB). Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, összefüggésük, tranzitivitás. Ekvivalenciareláció és partíció. A kocka szimmetriáinak a száma. Leszámlálás a Burnside-lemma segítségével.

A homomorfizmus fogalma, elemi tulajdonságai, haszna. Kép és mag, a képelemek teljes inverz képe. Normálosztó, faktorcsoport, a szorzás jóldefiniáltsága, természetes homomorfizmus, homomorfizmus-tétel. Kettő indexű részcsoport normálosztó. A normálosztó jellemzése konjugálás segítségével. A direkt szorzat fogalma. Elem rendje a direkt szorzatban, a direkt szorzat mikor ciklikus. A véges Abel-csoportok alaptétele, egyértelműség (NB). A direkt szorzat projekciói és belső jellemzése két tényező esetén. Izomorfizmus, a ciklikus csoportok izomorfia-típusai. Két négyelemű csoport van izomorfia erejéig: a ciklikus és a Klein-csoport. Minden prímnégyzet rendű csoport kommutatív (NB). A hatod- és nyolcadrendű csoportok (NB).

Egyszerű csoportok. A kommutatív egyszerű csoportok jellemzése. Az A_n alternáló csoport egyszerű, ha $n \geq 5$ (NB). A gömb mozgáscsoportja, azaz SO(3) egyszerű (NB). A feloldhatóság fogalma és kapcsolata az egyenletek gyökképletével (NB). Minden prímhatvány rendű csoport feloldható (NB). Burnside kétprímes tétele: minden $p^\alpha q^\beta$ rendű csoport feloldható (NB). A Feit-Thompson-tétel: minden páratlan rendű csoport feloldható (NB). A véges egyszerű csoportok osztályozása, sporadikus egyszerű csoportok, blokkrendszerek és a Mathieu-csoportok, a Szörnyeteg (csak meseszerűen).