BSc Algebra2 mintavizsga — válaszok

Tanácsok a tanuláshoz

A cél az, hogy a megszerzett tudás ne csak lexikai ismeretekből és algoritmusok begyakorlásából álljon (ilyen pl. a mátrixszorzás), hanem kellően rugalmas legyen ahhoz, hogy később alkalmazni lehessen, nemcsak a konkrét tételeket, hanem az elsajátított *gondolkodásmódot* is. Ezért a vizsgán alapkövetelmény a definíciók, tételek, bizonyítások ismerete, **megértése** (ami ezt méri: alkalmazási képessége), a kellő logikai készségek megléte, továbbá annak tudása, hogy **miben áll, mikor helyes egy bizonyítás**. Meg kell tanulni azt is, hogyan lehet a rutinszerű bizonyításokat önállóan kitalálni (lásd az alábbi $9-10$. feladatot). Mindez teljes mértékben a BSc első három éve alatt fog kialakulni.

Tanuláskor minden tételen és bizonyításon végig kell menni, és *minden egyes sorról, lépésről meggondolni, hogy az miért igaz, miből következik.* Aki jobb jegyre pályázik, azt is gondolja meg, hogy a tételek minden feltétele szükséges-e, és ha igen, akkor keressen ellenpéldát arra a (hamis) állításra, ami az adott feltétel elhagyásából származik. (Például ha az állítás az, hogy a $\mathbb{Z}_p^\times$ csoport minden p prímre ciklikus, akkor felmerül a kérdés, szükséges-e, hogy p prím legyen. Azt, hogy ez szükséges az mutatja, hogy $\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus.) A legjobbaknak azt tanácsoljuk, hogy a bizonyításokat maguk próbálják meg kitalálni (részben az előadás emlékei alapján), és csak akkor nézzék meg a jegyzetet, ha elakadnak. Így fel lehet deríteni a bizonyítások ötleteit, és elsősorban ezeket érdemes megjegyezni.

Mindezek szellemében az alábbi válaszokat nem kell megtanulni (hiszen a matematikai tudás pontosan azt jelenti, hogy új, *ismeretlen* helyzeteket is kezelni tudjunk). A mintavizsga célja a már megszerzett ismeretek ellenőrzése, tesztelése a vizsga előtt.

Első rész

1. *Legyen $V = \mathbb{C}^+$ Abel-csoport, $T = \mathbb{R}$ test. Definiáljuk minden $\lambda \in T$ és $v \in V$ szorzatát nullának. Írjunk föl egy olyan vektortéraxiómát, ami ebben a helyzetben nem teljesül.*

$1 \cdot v = v$.

2. *Adjunk példát arra, hogy a hárommal osztható fokú $\mathbb{R}[x]$-beli polinomok halmaza nem zárt az összeadásra.*

$(x^3 + 1) + (-x^3 + x)$.

3. *Adjunk példát a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben olyan részhalmazra, amely az összeadásra zárt, de a skalárszoros képzésére nem.*

Az egész koordinátájú pontok. Vagy akár az első síknegyed.

4. *Adjunk példát, ami azt mutatja, hogy a következő állítás hamis. „Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor minden vektora lineárisan függ a többiektől.”*

$\{0, v\}$, mert itt v nem függ 0-tól ha $v \neq 0$. Jó a $\{(0, 1), (0, 2), (1, 0)\}$ is.

5. *Adjunk meg egy lineáris kombinációt (vagyis négy valós együtthatót), ami tetszőleges u, v, w vektorok esetében megmutatja, hogy a $\{v+w, 0, w-u, u\}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő.*

0, 1, 0, 0.

6. *Egy vektortérben van 10 független vektor és egy 20 elemű generátorrendszer. Soroljuk föl a dimenzió lehetséges értékeit.*

$10 \leq \dim \leq 20$.

7. *Adjunk példát olyan $u, v \in \mathbb{R}^3$ vektorokra, hogy $\{u+v, u-v, v\}$ rangja 1 legyen.*

Például $v = 0$, $u \neq 0$ jó (bármely nem nulla vektortérben).

8. *Mondjuk ki a kicserélési tételt.*

Lásd Freud-jegyzet, 122. oldal.

9–10. *Az alábbi levezetésben megmutatjuk, hogy lineáris leképezések összege összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez oda kell írni az A, O, D, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése a következő:*
A) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
O) Lineáris leképezés összegtartása.
D) Lineáris leképezések összegének definíciója.
N) A fentiek közül egyik sem.

$$
\begin{gathered}
(A+B)(v+w) = \\
A(v+w) + B(v+w) = \\
A(v) + A(w) + B(v) + B(w) = \\
A(v) + B(v) + A(w) + B(w) = \\
(A+B)(v) + (A+B)(w)\,.
\end{gathered}
$$

A kiinduló pontszám 2, minden hibáért egy pont levonás jár.

Sorban D, O, A, D. Lásd Freud-jegyzet, 149. oldal.

11. *Ha A, B, C négyzetes mátrixok, $AB = 0$ és BC az egységmátrix, akkor mi lesz* $\det(A)$*?*

0 (hiszen $BC = E$ miatt B invertálható, így $A = 0$).

12. *Ha az $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$ mátrix rangja 7, akkor a karakterisztikus polinomjának hányszoros gyöke a nulla?*

Legalább 2-szeres (mert a nullához tartozó sajátaltér, azaz $\mathrm{Ker}(A)$ dimenziója $9 - 7 = 2$.)

13. *Egy valós mátrix négyzete az egységmátrix. Mi lehet a minimálpolinomja? Minden lehetséges polinomra adjunk példamátrixot.*

x^2-1 osztói közül $x-1$, $x+1$, x^2-1, a mátrixok E, $-E$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Freud, 6.3.4. Tétel).

14. *Egy négyszer négyes mátrix minimálpolinomja $(x-1)^2(x-2)$. Soroljuk föl a lehetséges karakterisztikus polinomokat.*

$(x-1)^3(x-2)$, $(x-1)^2(x-2)^2$.

15. *Adjunk példát olyan $\mathbb{R}^{2\times 2}$-beli, valós fölött diagonalizálható mátrixra, ami ortonormált bázisban nem diagonalizálható.*

Minden nem szimmetrikus mátrix két különböző, valós sajátértékkel a főtengelytétel miatt. Például $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (A két sajátvektor nem lesz merőleges.)

16. *Adjuk meg a síkon a 90 fokos forgatáshoz tartozó mátrix Jordan-alakját.*

$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

17. *A kvaterniócsoportban számítsuk ki a jik szorzatot.*

1.

18. *Adjuk meg $\mathbb{Z}_{18}^{\times}$ egy generátorelemét.*

5.

19. *Hány részcsoportja van egy 20 elemű ciklikus csoportnak?*

$d(20) = 6$ (Kiss-jegyzet, 171. oldal).

20. *Legyen $H = \{1, tf\} \leq D_5$. Adjunk meg egy olyan $g \in D_5$ elemet, melyre $gH \neq Hg$.*

Például $g = f$.

21. *Adott egy téglalap, ami nem négyzet. A szimmetriacsoportjának hány pályája van az oldalfelező pontok halmazán?*

2.

22. *Hány elemű az A_5 csoportban a 2 stabilizátora?*

$(5!/2)/5 = 12$ (hiszen A_5 tranzitív).

23. *Adjunk meg egy két elemmel generálható, nem kommutatív, 40 elemű csoportot, és két generátorelemet.*

$D_{20} = \langle f, t \rangle$.

24. *Mondjuk ki a két tényezős direkt szorzat belső jellemzéséről szóló tételt.*

Kiss-jegyzet, 216. oldal (4.9.12. Tétel).

25. *Hány negyedrendű elem van $D_4 \times \mathbb{Z}_4^+$-ban?*

20 (mert (a, b) rendje $[o(a), o(b)]$).

26. *Legyen $N = \{1, 8\}$. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_9^{\times}/N$ faktorcsoportban $5N$ rendjét.*

3 (mert $(5N)^3 = 8N = N$, de kisebb kitevőre nem az egységelemet kapjuk).

27. *Adjuk meg az összes olyan nyolcelemű csoportot izomorfia erejéig, amelyben pontosan egy darab másodrendű elem van.*

$\mathbb{Z}_8^+$ és Q (a másik három nyolcadrendű csoportnak több van).

28. *Izomorfia erejéig hány* 45 *elemű Abel-csoport létezik?*

2 (ezek $\mathbb{Z}_9^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ és $\mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ a véges Abel-csoportok alaptétele miatt).

29. *Adjunk meg egy* 360 *rendű egyszerű csoportot.*

A_6.

30. *Mondjuk ki a Feit–Thompson-tételt.*

Páratlan rendű nemkommutatív csoport nem lehet egyszerű.

Második rész

31. *Definiáljuk lineáris leképezés determinánsát a leképezés mátrixa segítségével, és igazoljuk, hogy ez a definíció nem függ a választott bázistól.*

$\det(A) = \det([A])$. A bázistranszformáció képlete miatt ha másik bázist veszünk, ugyanez jön ki, hiszen a determinánsok szorzástétele szerint $\det(S^{-1}MS) = \det(M)$.

32. *Igazoljuk, hogy* $r(AB) \leq r(B)$ *(ezek lineáris leképezések megfelelő vektorterek között).*

Legyen D az az $\mathrm{Im}(B)$-n értelmezett leképezés, melyre $D(v) = A(v)$ minden v-re. Ekkor $\dim \mathrm{Im}(D) = r(AB)$, ami a dimenziótétel miatt legfeljebb $\dim \mathrm{Im}(B) = r(B)$.

33. *Mondjuk ki pontosan és bizonyítsuk is be azt a tételt, mely szerint bármely két bal oldali mellékosztály vagy egyenlő, vagy diszjunkt.*

Az előadáson úgy szerepelt, ahogy a Kiss-jegyzet 4.4.14. Gyakorlatában van leírva.

34. *Definiáljuk az* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ *függvényt az* $f(a/b) = a+b$ *képlettel, ahol* a, b *egész. Adjunk példát, ami azt mutatja, hogy ez a függvény nem jóldefiniált.*

Például $1/2 = 2/4$ de $f(1/2) = 3$ nem egyenlő $f(2/4) = 6$-tal. A probléma ugyanaz, mint a faktorcsoport definíciója körül: egy tört többféle alakban is reprezentálható és f definíciója nem független a választott reprezentánstól (lásd Kiss-jegyzet, 196-197. oldal).

35. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+$ *izomorf az* 1 *abszolút értékű komplex számok csoportjával a szorzásra nézve.*

Alkalmazzuk a homomorfizmus-tételt a $\varphi(b) = \cos(2\pi b) + i\sin(2\pi b)$ homomorfizmusra.