NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. (BSc.) **Algebra-2: 3. vizsga (alap- és középszint)** *2007. június 29.*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. Írjuk fel azokat a vektortéraxiómákat, amelyekben skalárral szorzás szerepel, de összeadás nem.

a) $\forall v \in V\ \forall \lambda, \mu \in T\ (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
b) $\forall v \in V\ 1 \cdot v = v$.
(és az is, hogy $\forall v \in V\ \forall \lambda \in T\ \exists (\lambda \cdot v) \in V$.)

2. A $V = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \ :\ x + y - z = 0\}$ vektortérben adjunk meg egy bázist $\mathbb{R}$ fölött.

Például $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Adjunk példát, ami mutatja, hogy $W = \{M \ :\ \det(M) = 0\}$ nem altér $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben $\mathbb{R}$ fölött.

Például $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$, de összegük $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$.

4. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben egy három polinomból álló, 2 rangú rendszert $\mathbb{R}$ fölött.

Például x, x^2, $x + x^2$.

5. Legyen V a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomokból, valamint a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{R}$ fölött, W pedig azon polinomok altere, melyeknek a nulla gyöke. Adjuk meg W egy direkt kiegészítő alterét V-ben.

Például a konstans polinomokból álló altér.

6. Egy 10-dimenziós V vektortér egy valódi W alterének van egy négyelemű, lineárisan független generátorrendszere. Mik $\dim W$ lehetséges értékei?

$\dim W \in \{\ 4\ \}$

7. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ha $A \in V$ a $(2, 1)$ pontot $(3, 4)$-be, $B \in V$ a $(2, 1)$ pontot saját magába viszi, akkor hová viszi $2A - B$ a $(-2, -1)$ pontot?

A $(-4, -7)$ pontba.

8. Definiáljuk egy lineáris transzformáció rangjának a fogalmát.

Egy lineáris transzformáció rangja a képterének a dimenziója.

9. Mondjuk ki a jobb oldali nullosztó és a determináns kapcsolatáról szóló állítást négyzetes mátrixokra.

Ha $M \neq 0$ egy test fölötti négyzetes mátrix, akkor M akkor és csak akkor jobb oldali nullosztó, ha a determinánsa nulla.

10. Legyen $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $W = \mathbb{R}^3$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorterek. Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor mik $\dim \operatorname{Ker}(A)$ lehetséges értékei?

$\dim \operatorname{Ker}(A)$ lehet: 9, 8, 7, 6

11. Soroljuk föl a térben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben egy origón átmenő egyenes körüli 90 fokos forgatás sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:	1
Sajátalterek dimenziói:	1

12. Egy $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ nem diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x-1)^2(x-2)^2$. Soroljuk föl az összes lehetséges minimálpolinomot.

$m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ vagy $(x-1)(x-2)^2$ vagy $(x-1)^2(x-2)^2$.

13. Írjunk föl egy olyan nem diagonalizálható, Jordan-alakú mátrixot, amelyben az i sajátértékhez 1×1-es blokk tartozik.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

14. Mondjuk ki a főtengelytételt.

Egy valós vektortéren megadott A lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha A-nak valamely (és így minden) ortonormált bázisban fölírt mátrixa szimmetrikus.

15. Egészítsük ki az $\{(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T\}$ vektorrendszert a sík egy ortonormált bázisává.

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

16. Mennyi a síkon az origó körüli 280 fokos forgatás rendje?

9

17. Hány negyedrendű elem van a $\mathbb{Z}_8^\times$ csoportban?

Negyedrendű elemek száma $= 0$

18. Hány másodrendű elem van D_{1000}-ben?

Másodrendű elemek száma $= 1001$

19. Hány másodrendű részcsoportja van a Klein-csoportnak?

A másodrendű részcsoportok száma $= 3$

20. $\mathbb{Z}^+$-ban mennyi a hattal osztható számokból álló részcsoport indexe?

6

21. A kvaterniócsoportban mennyi a jik által generált részcsoport indexe?

8

22. Hány elemű a kocka szimmetriacsoportjában egy lapközéppont stabilizátora?

A stabilizátor elemszáma $= 8$

23. Hány pályája van a D_6 csoportnak egy szabályos hatszög átlóinak 9 elemű halmazán, és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei:	A pálya elemszáma:
a középponton átmenő átlók	3
a többi átló	6

24. Adjunk meg a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ csoportban egy háromelemű generátorrendszert.

Pl. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

25. Hány másodrendű elem van $\mathbb{Z}_9^\times \times \mathbb{Z}_8^+$-ban?

Másodrendű elemek száma $= 3$

26. Adjunk meg S_7-ben egy 2520 elemű normálosztót.

A_7

27. Legyen $N = \{1, 10\}$. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_{11}^\times/N$ faktorcsoportban $2N$ rendjét.

$o(2N) = 5$

28. Izomorfia erejéig hány 16 elemű Abel-csoport létezik?

16 elemű Abel-csoportok száma = 5

29. Adjuk meg az összes nyolcelemű csoportot izomorfia erejéig.

Ezek a csoportok: Q, D_4, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$.

30. Mondjuk ki a Burnside-lemmát.

Minden véges permutációcsoportban a pályák száma megegyezik az elemek fixpontjai számának átlagával.

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan* 2 *pontot ér, a megoldásra* 0, 1 *vagy* 2 *pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Bizonyítsuk be, hogy lineáris leképezés skalárszorosa is lineáris.
32. Bizonyítsuk be, hogy minden sajátérték gyöke a karakterisztikus polinomnak. A felhasznált, determinánsokról szóló segédtételt pontosan ki kell mondani, de nem kell bebizonyítani.
33. Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport részcsoportja is ciklikus.
34. Magyarázzuk el, mint jelent a „reprezentánsfüggetlenség” a faktorcsoport definíciójában, és igazoljuk, hogy a faktorcsoport definíciója értelmes.
35. Mondjuk ki a Feit–Thompson-tételt és Burnside kétprímes tételét.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \leq 41$	2
$42 \leq S \leq 53$	3
$54 \leq S \leq 65$	4
$66 \leq S \leq 90$	5