NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. (BSc.) **Algebra-2: 2. vizsga (alap- és középszint)** *2007. június 15.*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. A $V = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ M^T = M\}$ vektortérben adjunk meg egy bázist $\mathbb{R}$ fölött.

Például $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy $W = \{(x, y) \ : \ xy \geq 0\}$ nem altér a síkon $\mathbb{R}$ fölött.

$(1, 2), (-2, -1) \in W$, de összegük $(1, 2) + (-2, -1) = (-1, 1) \notin W$.

3. Ha u, v függetlenek, de u, v, w összefüggőek, mennyi $\{u, v, w\}$ rangja?

$r(\{u, v, w\}) = 2$

4. Egy 2007-dimenziós vektortérben hánydimenziósak egy 1526-dimenziós altér direkt kiegészítő alterei?

$2007 - 1526 = 481$

5. Soroljuk föl, hogy egy $\mathbb{Z}_2$ fölötti vektortérben hány elemű lehet egy két elemmel generált altér.

1, 2, 4

6–7. Az alábbi levezetésben, ahol A, B, C lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v \in V$, az egyik disztributivitást igazoljuk. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, T, S, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

A) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
T) Lineáris leképezés összegtartása.
S) Lineáris leképezések összegének definíciója.
P) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
N) A fentiek közül egyik sem.

$$\big(C(A+B)\big)(v) = \qquad \boxed{\text{P}}$$
$$C\big((A+B)(v)\big) = \qquad \boxed{\text{S}}$$
$$C\big(A(v)+B(v)\big) = \qquad \boxed{\text{T}}$$
$$C\big(A(v)\big)+C\big(B(v)\big) = \qquad \boxed{\text{P}}$$
$$(CA)(v)+(CB)(v) = \qquad \boxed{\text{S}}$$
$$(CA+CB)(v)$$

A kiinduló pontszám 2, minden hibáért egy pont levonás jár.

8. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ha $A \in V$ az $(1,2)$ pontot $(3,4)$-be viszi, akkor hová viszi A **ellentettje** a $(2,4)$ pontot?

A $(-6,-8)$ pontba.

9. Mondjuk ki a kicserélési tételt.

Ha a V vektortérben egy F lineárisan független vektorrendszer minden eleme függ egy G (véges) vektorrendszer elemeitől, akkor F bármely f elemét kicserélhetjük G egy alkalmas g elemére, hogy $g \notin F - \{f\}$ és $F - \{f\} \cup \{g\}$ független maradjon.

10. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bal oldali nullosztó. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

$\det(M) = \ 0$

11. Legyen $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $W = \mathbb{R}$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorterek. Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A)$ lehetséges értékei?

$\dim \mathrm{Ker}(A) = \ 8$ vagy 9

12. Soroljuk föl a térben egy origón átmenő egyenes körüli 180 fokos forgatás sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:	1,	-1
Sajátalterek dimenziói:	1,	2

13. Mondjuk ki a Cayley-Hamilton-tételt.

Minden négyzetes mátrix (illetve véges dimenziós vektortéren ható lineáris transzformáció) minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának. Máshogy fogalmazva: ez a mátrix (transzformáció) gyöke a karakterisztikus polinomjának.

14. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix nem diagonalizálható, és az egyik sajátértéke $1+i$. Mi a karakterisztikus polinomja?

$k_M(x) = \ (x-1-i)^2$

15. Írjunk föl egy olyan Jordan-alakú mátrixot, amelyben az i sajátértékhez 2×2-es, a 2 sajátértékhez 1×1-es blokk tartozik.

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

16. Mennyi a síkon a 260 fokos origó körüli forgatás rendje?

18

17. Az $\{1,a,b,c\}$ Klein-csoport. Mennyi a b által generált részcsoport indexe?

2

18. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a $(ki^{-1}j^{-1}i)$ szorzatot.

$ki^{-1}j^{-1}i = -i$

19. Hány ötödrendű elem van a $\mathbb{Z}_{80}^{+}$ csoportban?

Ötödrendű elemek száma $= \varphi(5) = 4$

20. Hány hetedrendű részcsoportja van az A_5 csoportnak?

Részcsoportok száma $=$ 0

21. $\mathbb{Z}^{+}$-ban a páratlan számok mellékosztályt alkotnak. Melyik H részcsoport szerinti mellékosztályról van szó?

$H =$ páros számok

22. Hány elemű a szabályos tetraéder szimmetriacsoportjában egy csúcs stabilizátora?

A stabilizátor elemszáma $=$ 6

23. Hány pályája van a D_4 diédercsoportnak az egység oldalú négyzet átlóit negyedelő pontok ötelemű halmazán, és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei:	A pálya elemszáma:
a négyzet középpontja	1
a többi negyedelő pont	4

24. Adjunk meg egy olyan $g \in \mathbb{Z}_{16}^{\times}$ elemet, hogy g és 5 generátorrendszer legyen.

Pl. $g =$ 3

25. Hány negyedrendű elem van $A_4 \times \mathbb{Z}_4^{+}$-ban?

Negyedrendű elemek száma $=$ 8

26. Adjunk meg a D_6 csoportban egy olyan normálosztót, amelynek elemszáma nem 1 és nem 12.

Például a forgatások: $f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6 = id$, hiszen ennek kettő az indexe.

27. Legyen $N = \{1, f^4\}$. Számítsuk ki a D_8/N faktorcsoportban f^3N rendjét.

$o(f^3N) =$ 4

28. Izomorfia erejéig hány 40 elemű Abel-csoport létezik?

40 elemű Abel-csoportok száma $=$ 3

29. Adjuk meg az összes olyan nyolcelemű csoportot izomorfia erejéig, amelyben legalább négy darab negyedrendű elem van.

Az ilyen csoportok: Q és $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+$.

30. Definiáljuk az egyszerű csoport fogalmát.

A G csoport akkor egyszerű, ha pontosan két darab normálosztója van.

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan* 2 *pontot ér, a megoldásra* 0, 1 *vagy* 2 *pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Bizonyítsuk be, hogy ha V vektortér T fölött és $v \in V$, akkor $0v = 0$. Hány jelentése van a 0 szimbólumnak az előző képletben?
32. Bizonyítsuk be, hogy minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak.
33. Soroljuk föl azokat a véges csoportokat izomorfia erejéig, melyek rendje osztható 13-mal, és pontosan két részcsoportjuk van.
34. Bizonyítsuk be, hogy ha $\psi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $N = \mathrm{Ker}(\psi)$, akkor minden $g \in G$-re $gN = Ng$.
35. Bontsuk föl a $\mathbb{Z}_{16}^{\times}$ csoportot egy kételemű és egy négyelemű normálosztó direkt szorzatára.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \leq 41$	2
$42 \leq S \leq 53$	3
$54 \leq S \leq 65$	4
$66 \leq S \leq 90$	5