NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra-2: 1. vizsga (alap- és középszint)** *2007. május 31.*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. Írjuk fel azokat a vektortéraxiómákat, amelyekben skalárral szorzás szerepel, de összeadás nem.

> a) $\forall v \in V\ \forall \lambda, \mu \in T\ (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
> b) $\forall v \in V\ 1 \cdot v = v$.
> (és az is, hogy $\forall v \in V\ \forall \lambda \in T\ \exists (\lambda \cdot v) \in V$.)

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy $\mathbb{Z}[x]$ nem altér $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött.

> $x \in \mathbb{Z}[x]$, de $\frac{1}{2} \cdot x \notin \mathbb{Z}[x]$.

3. Definiáljuk egy vektorrendszer rangjának a fogalmát.

> Egy $H \subseteq V$ vektorrendszer rangja = a H-beli vektorok által kifeszített altér dimenziója

4. Mi a különbség aközött, hogy $W = U + V$, ill. hogy $W = U \oplus V$?

> $W = U \oplus V$ esetén megköveteljük, hogy $U \cap V = \{0\}$ teljesüljön.

5. Egy V vektortérben van egy 12 elemű, lineárisan összefüggő generátorrendszer és egy nyolcdimenziós valódi altér. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

> $\dim V \in \{\ 9,\ 10,\ 11\ \}$

6. Mondjuk ki a kicserélési tételt.

> Ha a V vektortérben egy F lineárisan független vektorrendszer minden eleme függ egy G (véges) vektorrendszer elemeitől, akkor F bármely f elemét kicserélhetjük G egy alkalmas g elemére, hogy $g \notin F - \{f\}$ és $F - \{f\} \cup \{g\}$ független maradjon.

7. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Ennek a nulleleme hová viszi a $(2, 3)$ pontot?

> A $(0, 0)$ pontba.

8–9. Az alábbi levezetésben A, B, C lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v \in V$, az egyik disztributivitást igazoljuk. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, O, D, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

A) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
O) Lineáris leképezés összegtartása.
D) Lineáris leképezések összegének definíciója.
S) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
N) A fentiek közül egyik sem.

$$\big((A+B)C\big)(v) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(A+B)\big(C(v)\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$A\big(C(v)\big) + B\big(C(v)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$
$$(AC)(v) + (BC)(v) = \quad \boxed{\text{D}}$$
$$(AC+BC)(v)$$

A kiinduló pontszám 2, minden hibáért egy pont levonás jár.

10. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bal oldali nullosztó. Mik a rangjának lehetséges értékei?

$\rho(M) = 1$

11. Definiáljuk az ortonormált bázis fogalmát.

$B \subseteq V$ ortonormált bázis V-ben, ha B olyan bázisa V-nek, melynek elemei egységnyi hosszúak, és a különböző báziselemek merőlegesek egymásra (skaláris szorzatuk nulla).

12. Soroljuk föl a térben egy origót tartalmazó síkra való tükrözés sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:	1,	-1
Sajátalterek dimenziói:	2,	1

13. Adjunk meg egy nem diagonalizálható mátrixot $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben.

Pl. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. Egy $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ nem diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x-1)^3(x-2)$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_A(x) = (x-1)^3(x-2)$ vagy $(x-1)^2(x-2)$.

15. Mondjuk ki a főtengelytételt.

Egy valós vektortéren megadott A lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha A-nak valamely (és így minden) ortonormált bázisban fölírt mátrixa szimmetrikus.

16. Írjuk föl azt a 3×3-as Jordan-blokkot, amelyben a sajátérték $i + 1$.

$$J = \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 \\ 1 & i+1 & 0 \\ 0 & 1 & i+1 \end{pmatrix}$$

17. Definiáljuk a Klein-csoportot.

$V = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$

18. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a $(jij^{-1}k)$ szorzatot.

$jij^{-1}k = j$

19. Hány ötödrendű elem van a $\mathbb{Z}_{80}^\times$ csoportban?

Ötödrendű elemek száma $= 0$

20. Hány részcsoportja van egy 30 elemű ciklikus csoportnak?

Részcsoportok száma $= 8$

21. S_3-ban a transzpozíciók bal oldali mellékosztályt alkotnak. Melyik H részcsoport szerinti mellékosztályról van szó?

$H = \{id, (123), (132)\} = A_3$

22. Hány pályája van a D_4 diédercsoportnak az egység oldalú négyzet oldalait negyedelő pontok 12 elemű halmazán, és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei:	A pálya elemszáma:
oldalfelező pontok	4
a csúcsoktól 1/4 távolságra levő pontok	8

23. Hány elemű az A_6 csoportban a 3 stabilizátora?

A stabilizátor elemszáma $= 60$

24. Adjunk meg egy olyan $g \in D_6$ elemet, hogy g és tf^2 generátorrendszer legyen.

Pl. $g = f$

25. Hány másodrendű elem van $S_3 \times \mathbb{Z}_6^+$-ban?

Másodrendű elemek száma $= 7$

26. Definiáljuk egy G csoport normálosztójának fogalmát.

Egy $N \subseteq G$-t normálosztónak mondunk, ha N részcsoport G-ben, és minden $g \in G$-re $gN = Ng$ (vagy $g^{-1}Ng = N$)

27. Legyen $N = \{1, 9\}$. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_{20}^{\times}/N$ faktorcsoportban $11N$ rendjét.

$o(11N) =$ 2

28. Adjuk meg az összes olyan hatelemű csoportot izomorfia erejéig, amelyben pontosan egy darab másodrendű elem van.

Az ilyen csoportok: $\mathbb{Z}_6^+$

29. Izomorfia erejéig hány 20 elemű Abel-csoport létezik?

20 elemű Abel-csoportok száma = 2

30. Adjunk meg egy G végtelen egyszerű csoportot.

Pl. $G =$ $SO(3)$

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan 2 pontot ér, a megoldásra 0, 1 vagy 2 pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Igazoljuk, hogy összefüggő vektorrendszerben van olyan vektor, ami függ a többitől.
32. Legyen m a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek egy A lineáris transzformáció gyöke. Mutassuk meg, hogy ha az f polinomra $f(A) = 0$ akkor $m \mid f$.
33. Mutassuk meg, hogy egy páros rendű ciklikus csoportban pontosan egy másodrendű elem van.
34. A D_4 csoportban $tf \neq ft$. Hogyan lehetséges mégis, hogy $tN = Nt$, ahol $N = \langle f \rangle$?
35. Keressünk olyan 40 elemű, nem kommutatív csoportot, ami nem izomorf $\mathbb{Z}_4^+ \times D_5$-tel.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \leq 41$	2
$42 \leq S \leq 53$	3
$54 \leq S \leq 65$	4
$66 \leq S \leq 90$	5