BSc Algebra2 mintavizsga

A vizsga első felében szereplő 30 kérdés megválaszolására egy óra áll rendelkezésre. Mindegyik kérdésre a helyes válasz 1 pontot, az üresen hagyott, vagy helytelen válasz 0 pontot ér, indokolni nem kell. Aki itt elér legalább 15 pontot, annak a vizsgája már sikeres, a többieké sajnos elégtelen (és ilyenkor ha valaki meg is írja a vizsga második felét, azt nem javítjuk ki). A vizsga második felében harminc perc alatt 5 kérdésre kell (indoklással) válaszolni, a maximális pontszám mindegyikre 2 pont. Ha az első részre kapott összpontszám $x \geq 15$, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$, és az osztályzat $S \geq 66$ esetén jeles, $S \geq 54$ esetén jó, $S \geq 42$ esetén közepes, különben elégséges.

Első rész

1. *Legyen $V = \mathbb{C}^+$ Abel-csoport, $T = \mathbb{R}$ test. Definiáljuk minden $\lambda \in T$ és $v \in V$ szorzatát nullának. Írjunk föl egy olyan vektortéraxiómát, ami ebben a helyzetben nem teljesül.*

2. *Adjunk példát arra, hogy a hárommal osztható fokú $\mathbb{R}[x]$-beli polinomok halmaza nem zárt az összeadásra.*

3. *Adjunk példát a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben olyan részhalmazra, amely az összeadásra zárt, de a skalárszoros képzésére nem.*

4. *Adjunk példát, ami azt mutatja, hogy a következő állítás hamis. „Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor minden vektora lineárisan függ a többiektől.”*

5. *Adjunk meg egy lineáris kombinációt (vagyis négy valós együtthatót), ami tetszőleges u, v, w vektorok esetében megmutatja, hogy a $\{v+w, 0, w-u, u\}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő.*

6. *Egy vektortérben van 10 független vektor és egy 20 elemű generátorrendszer. Soroljuk föl a dimenzió lehetséges értékeit.*

7. *Adjunk példát olyan $u, v \in \mathbb{R}^3$ vektorokra, hogy $\{u+v, u-v, v\}$ rangja 1 legyen.*

8. *Mondjuk ki a kicserélési tételt.*

9–10. *Az alábbi levezetésben megmutatjuk, hogy lineáris leképezések összege összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez oda kell írni az A, O, D, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése a következő:*

A) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
O) Lineáris leképezés összegtartása.
D) Lineáris leképezések összegének definíciója.
N) A fentiek közül egyik sem.

$$(A+B)(v+w) =$$
$$A(v+w) + B(v+w) =$$
$$A(v) + A(w) + B(v) + B(w) =$$
$$A(v) + B(v) + A(w) + B(w) =$$
$$(A+B)(v) + (A+B)(w)\,.$$

A kiinduló pontszám 2, minden hibáért egy pont levonás jár.

11. *Ha A, B, C négyzetes mátrixok, $AB = 0$ és BC az egységmátrix, akkor mi lesz* $\det(A)$*?*

12. *Ha az $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$ mátrix rangja 7, akkor a karakterisztikus polinomjának hányszoros gyöke a nulla?*

13. *Egy valós mátrix négyzete az egységmátrix. Mi lehet a minimálpolinomja? Minden lehetséges polinomra adjunk példamátrixot.*

14. *Egy négyszer négyes mátrix minimálpolinomja $(x-1)^2(x-2)$. Soroljuk föl a lehetséges karakterisztikus polinomokat.*

15. *Adjunk példát olyan $\mathbb{R}^{2\times 2}$-beli, valós fölött diagonalizálható mátrixra, ami ortonormált bázisban nem diagonalizálható.*

16. *Adjuk meg a síkon a 90 fokos forgatáshoz tartozó mátrix Jordan-alakját.*

17. *A kvaterniócsoportban számítsuk ki a jik szorzatot.*

18. *Adjuk meg $\mathbb{Z}_{18}^{\times}$ egy generátorelemét.*

19. *Hány részcsoportja van egy 20 elemű ciklikus csoportnak?*

20. *Legyen $H = \{1, tf\} \le D_5$. Adjunk meg egy olyan $g \in D_5$ elemet, melyre $gH \neq Hg$.*

21. *Adott egy téglalap, ami nem négyzet. A szimmetriacsoportjának hány pályája van az oldalfelező pontok halmazán?*

22. *Hány elemű az A_5 csoportban a 2 stabilizátora?*

23. *Adjunk meg egy két elemmel generálható, nem kommutatív, 40 elemű csoportot, és két generátorelemet.*

24. *Mondjuk ki a két tényezős direkt szorzat belső jellemzéséről szóló tételt.*

25. *Hány negyedrendű elem van $D_4 \times \mathbb{Z}_4^+$-ban?*

26. *Legyen $N = \{1, 8\}$. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_9^{\times}/N$ faktorcsoportban $5N$ rendjét.*

27. *Adjuk meg az összes olyan nyolcelemű csoportot izomorfia erejéig, amelyben pontosan egy darab másodrendű elem van.*

28. *Izomorfia erejéig hány 45 elemű Abel-csoport létezik?*

29. *Adjunk meg egy 360 rendű egyszerű csoportot.*

30. *Mondjuk ki a Feit–Thompson-tételt.*

Második rész

31. *Definiáljuk lineáris leképezés determinánsát a leképezés mátrixa segítségével, és igazoljuk, hogy ez a definíció nem függ a választott bázistól.*

32. *Igazoljuk, hogy* $r(AB) \leq r(B)$ *(ezek lineáris leképezések megfelelő vektorterek között).*

33. *Mondjuk ki pontosan és bizonyítsuk is be azt a tételt, mely szerint bármely két bal oldali mellékosztály vagy egyenlő, vagy diszjunkt.*

34. *Definiáljuk az* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ *függvényt az* $f(a/b) = a+b$ *képlettel, ahol* a, b *egész. Adjunk példát, ami azt mutatja, hogy ez a függvény nem jóldefiniált.*

35. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+$ *izomorf az 1 abszolút értékű komplex számok csoportjával a szorzásra nézve.*