Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Kilencedik alkalom (2007. április 25–∞)

4.3.28. *Az $\mathbb{R}^\times$, az $\mathbb{R}^+$ és a $\mathbb{C}^\times$ csoportok között van-e izomorf?*

4.5.18. *Igazoljuk, hogy minden négyelemű csoport izomorf vagy a négyelemű ciklikus csoporttal, vagy a Klein-csoporttal, attól függően, hogy van-e benne negyedrendű elem.*

4.5.16. *Mutassuk meg, hogy a D_3 diédercsoport izomorf az S_3 szimmetrikus csoporttal.*

4.5.22. *Mutassuk meg, hogy a D_4 és a Q csoportok nem izomorfak.*

4.5.25. *Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük: $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q (a kvaterniócsoport), $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_2)$.*

4.5.35. *Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 3$, akkor az A_n alternáló csoportban minden pont stabilizátora A_{n-1}-gyel izomorf.*

4.4.30. *Legyen H részcsoportja a G csoportnak és $g \in G$. Igazoljuk, hogy a gHg^{-1} komplexusszorzat is részcsoport (ez a H-nak a g-vel vett konjugáltja), mely H-val izomorf.*

4.9.3. *Adjunk meg egy izomorfizmust $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ és $\mathbb{Z}_6^+$ között. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ nem izomorf $\mathbb{Z}_4^+$-gyel. A felsorolt csoportok közül izomorf-e valamelyik a Klein-csoporttal?*

4.9.22. *Adjuk meg a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoport összes negyedrendű elemét.*

4.9.23. *Mutassuk meg az elemek rendjeinek kiszámításával, hogy a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ és a $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoportok nem izomorfak.*

4.9.24. *A véges Abel-csoportok alaptételének segítségével döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.*

4.9.25. *Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók föl direkt szorzatra, és igenlő válasz esetén adjunk meg egy ilyen felbontást: $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$.*

4.9.26. *Hányféleképpen bontható föl két nemtriviális normálosztójának direkt szorzatára a $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ csoport?*

4.9.32. *Igazoljuk, hogy a kocka szimmetriacsoportja $S_4 \times \mathbb{Z}_2^+$-szal izomorf.*

4.9.13. *Igazoljuk, hogy a gömb szimmetriacsoportja, azaz $\mathrm{O}(3)$ izomorf az $\mathrm{SO}(3)$ és a $\mathbb{Z}_2^+$ csoportok direkt szorzatával.*

IHF. *Bontsuk föl a $\mathbb{Z}_{11}^\times$ csoportot két prímhatványrendű ciklikus részcsoport direkt szorzatára. Adjuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_{36}^\times$ csoport prímhatványrendű ciklikusakra való felbontásában milyen rendű tényezők szerepelnek.*

4.7.6, 4.7.7. *Igazoljuk az alább megadott $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy homomorfizmusok, határozzuk meg a magjukat és a képüket.*

a) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(m)$ *az m maradéka n-nel osztva.*
b) $G_1 = \mathrm{GL}(n,T)$, $G_2 = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
c) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ *az f előjele (azaz ± 1).*
d) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ *ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.*
e) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$.
f) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ *(vagyis φ az i behelyettesítése).*